

Chapitre 6

Magnétisme dans un réseau périodique

Sommaire

1	Champs de jauge sur réseau	2
1-1	Rappels : modèle des liaisons fortes	2
1-2	Réseau sous champ magnétique	3
1-3	Choix de jauge	3
1-4	Jauge de Landau	5
2	Le papillon de Hofstadter	5
2-1	L'équation de Harper	5
2-2	Le spectre de Hofstadter	6
2-3	Le nombre de Chern	7
2-4	Expériences sur des super-réseaux	9
3	Les réseaux optiques secoués	9
3-1	Rappel : le cas unidimensionnel (version 1).	9
3-2	Le cas unidimensionnel (version 2).	11
3-3	Le cas bi-dimensionnel.	11
3-4	Exemple d'expériences avec un réseau secoué	13
4	Réseaux combinant différents états internes	13
4-1	L'effet tunnel assisté par laser sur une échelle	14
4-2	Passage à un réseau bi-dimensionnel	16
4-3	Rectification du flux	16
5	Remarques finales	17

Nous nous sommes intéressés jusqu'ici à la génération d'un champ de jauge artificiel pour un atome se déplaçant librement dans l'espace ou confiné dans un potentiel harmonique. Une autre classe très importante de problèmes porte sur le magnétisme orbital en présence d'un potentiel spatialement périodique. Ce type de question peut apparaître par exemple quand on étudie l'effet d'un fort champ magnétique sur le fluide d'électrons d'un cristal.

La richesse de ce problème est liée à l'existence de deux échelles de longueur qui peuvent être du même ordre. La première est la maille a du réseau périodique, que l'on peut prendre carré pour fixer les idées, la seconde est la longueur magnétique que nous avons déjà rencontrée

$$\ell = \sqrt{\hbar/qB}. \tag{6.1}$$

Le rapport de ces deux longueurs peut s'écrire en terme du flux $\Phi = Ba^2$ du champ magnétique au travers d'une cellule unité, exprimé en unité du quantum de flux $\Phi_0 = h/q$:

$$\frac{a^2}{\ell^2} = \frac{qBa^2}{\hbar} = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}. \tag{6.2}$$

Rappelons que cette quantité peut être comprise comme la phase Aharonov-Bohm accumulée par la fonction d'onde de la particule qui se déplacerait sur le bord d'une des cellules du réseau.

Tant que le flux Φ reste petit devant Φ_0 , on ne s'attend pas à des modifications spectaculaires de la physique rencontrée pour une particule libre : le pas du réseau est beaucoup plus petit que la taille typique des orbites cyclotron, qui ne devraient donc pas être très affectées par la discrétisation de l'espace. Ce régime $\Phi \ll \Phi_0$ correspond au cas des solides « ordinaires » (maille a de quelques angströms) et des champs réalisables en laboratoire (quelques dizaines de Teslas au maximum).

En revanche, pour les grands champ magnétiques tels que $\Phi \sim \Phi_0$, la « compétition » entre ces deux échelles de longueur va induire une physique radicalement nouvelle, avec un spectre à une particule dont nous allons voir qu'il possède une structure fractale. Ce régime peut être exploré avec des matériaux « synthétiques » et/ou des champs magnétiques artificiels, en particulier des atomes froids confinés dans un réseau optique. Ce problème du mouvement quantique en présence simultanée d'un potentiel périodique et d'un champ magnétique a fait l'objet de plusieurs séminaires attachés à cette série de cours. Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur quelques points marquants, sans chercher à être exhaustif sur ce problème à la fois riche et complexe.

1 Champs de jauge sur réseau

1-1 Rappels : modèle des liaisons fortes

Nous commencerons notre étude par quelques rappels sur le modèle simple d'un réseau 1D ou 2D dans le régime des liaisons fortes, en nous restreignant à une seule bande d'énergie. Ce problème a été étudié en détail dans le cours de l'an dernier et nous allons donc nous borner à en donner les éléments utiles pour la suite.

Considérons un réseau uni-dimensionnel périodique, de période spatiale a (figure 6.1). On note $|w_j\rangle$ l'état de l'atome lorsqu'il est localisé sur le site situé en $x_j = ja$ ($j \in \mathbb{Z}$). La dynamique de l'atome dans le réseau est caractérisée par le coefficient tunnel J , qui donne l'amplitude de probabilité pour sauter du site j vers un des deux voisins $j \pm 1$. L'hamiltonien

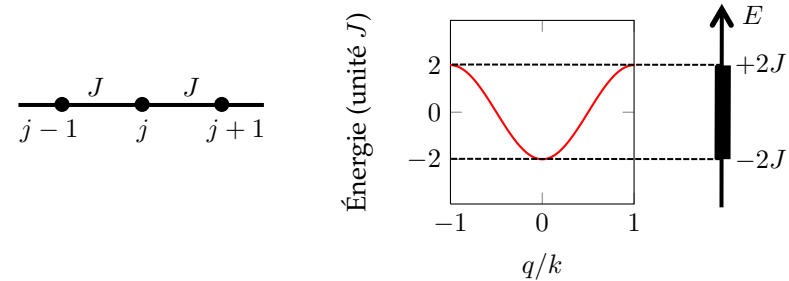


FIGURE 6.1. Réseau 1D en régime des liaisons fortes (Hubbard), avec une bande d'énergie de largeur $4J$.

décrivant le mouvement de l'atome est donc

$$\hat{H} = -J (\hat{T} + \hat{T}^\dagger) \quad (6.3)$$

où l'opérateur \hat{T} translate la particule d'un site vers la droite

$$\hat{T} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |w_{j+1}\rangle \langle w_j|. \quad (6.4)$$

Les états propres de cet hamiltonien sont les fonctions de Bloch, que l'on peut voir comme la transposition de la notion d'onde plane à cet espace discrétisé :

$$|\psi_q\rangle = \sum_j e^{ijaq} |w_j\rangle, \quad (6.5)$$

le quasi-moment q étant choisi par convention dans la zone de Brillouin $q \in]-\pi/a, \pi/a]$. L'énergie d'un état $|\psi_q\rangle$ est donnée par

$$E(q) = -2J \cos(aq), \quad (6.6)$$

ce qui conduit à une bande d'énergie centrée en 0 et de largeur $4J$.

Le cas bi-dimensionnel est une généralisation directe de ce qui précède, au moins dans le cas d'un réseau carré. Un site est maintenant repéré par deux entiers j, l , correspondant aux deux directions d'espace x, y . L'hamiltonien (séparable) s'écrit

$$\hat{H} = \hat{H}_x + \hat{H}_y \quad \text{avec} \quad \hat{H}_\nu = -J (\hat{T}_\nu + \hat{T}_\nu^\dagger), \quad \nu = x, y, \quad (6.7)$$

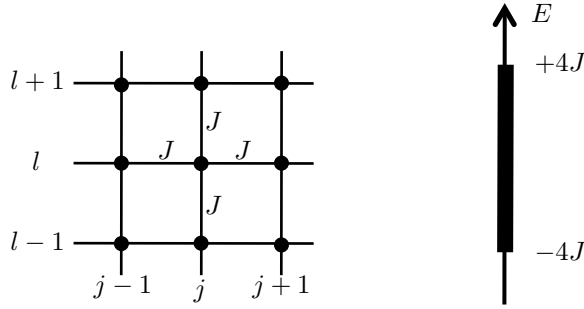


FIGURE 6.2. Réseau carré 2D en régime des liaisons fortes (Hubbard), avec une bande d'énergie de largeur $8J$.

ou encore, de manière explicite :

$$\hat{H} = -J \sum_{j,l} (|w_{j+1,l}\rangle\langle w_{j,l}| + |w_{j,l+1}\rangle\langle w_{j,l}|) + \text{h.c.} \quad (6.8)$$

Ses vecteurs propres sont des fonctions de Bloch $|\psi_{\mathbf{q}}\rangle$ repérées maintenant par un vecteur $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ et ayant pour énergie $E(\mathbf{q})$

$$|\psi_{\mathbf{q}}\rangle = \sum_{j,l} e^{ia(jq_x + lq_y)} |w_{j,l}\rangle, \quad E(\mathbf{q}) = -2J (\cos(aq_x) + \cos(aq_y)), \quad (6.9)$$

soit une bande d'énergie centrée en 0 et de largeur $8J$.

1-2 Réseau sous champ magnétique

En présence d'un champ magnétique perpendiculaire au plan du réseau, l'hamiltonien (6.8) doit être modifié pour prendre en compte la phase de Aharonov-Bohm

$$\phi(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}') = \frac{q}{\hbar} \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (6.10)$$

le long des chemins qui mènent d'un site $\mathbf{r} = (j, l)$ aux quatre sites voisins $\mathbf{r}' = (j \pm 1, l)$ et $(j, l \pm 1)$. Une manière approchée pour ce faire est

la *substitution de Peierls*¹, qui consiste à assigner – dans ce modèle de liaisons fortes – des phases différentes aux coefficients tunnel le long des liens horizontaux et verticaux qui forment le réseau carré 2D :

$$-J |w_{j+1,l}\rangle\langle w_{j,l}| \longrightarrow -J e^{i\phi(j,l \rightarrow j+1,l)} |w_{j+1,l}\rangle\langle w_{j,l}| \quad (6.11)$$

avec bien sûr

$$\phi(j, l \rightarrow j+1, l) = -\phi(j+1, l \rightarrow j, l) \quad (6.12)$$

pour garantir que l'hamiltonien reste hermitien.

1-3 Choix de jauge

Tout comme il existe un arbitraire de choix de jauge pour une particule mobile dans le plan continu xy , il existe également un arbitraire de jauge dans le choix de ces phases. Pour nous en convaincre, considérons d'abord le modèle à 4 sites de la figure 6.3, correspondant à l'hamiltonien

$$\hat{H} = -J (e^{i\phi_1} |a\rangle\langle d| + e^{i\phi_2} |b\rangle\langle a| + e^{i\phi_3} |c\rangle\langle b| + e^{i\phi_4} |d\rangle\langle c|) + \text{h.c.} \quad (6.13)$$

Considérons le changement de base suivant, qui consiste simplement à redéfinir la phase des états utilisés :

$$|\tilde{a}\rangle = e^{i\phi_1} |a\rangle, \quad |\tilde{b}\rangle = e^{i(\phi_1+\phi_2)} |b\rangle, \quad |\tilde{c}\rangle = e^{i(\phi_1+\phi_2+\phi_3)} |c\rangle, \quad |\tilde{d}\rangle = |d\rangle. \quad (6.14)$$

On voit immédiatement que l'hamiltonien (6.13) se réécrit

$$\hat{H} = -J (|\tilde{a}\rangle\langle \tilde{d}| + |\tilde{b}\rangle\langle \tilde{a}| + |\tilde{c}\rangle\langle \tilde{b}| + e^{i\Theta} |\tilde{d}\rangle\langle \tilde{c}|) + \text{h.c.} \quad (6.15)$$

avec

$$\Theta = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4. \quad (6.16)$$

Dans ce cas particulier, on a donc pu choisir tous les coefficients tunnel réels sauf un d'entre eux, qui concentre la phase totale des coefficients initiaux. Nous avons placé ce coefficient complexe sur le lien supérieur de la

1. Pour des charges bougeant dans un réseau en présence d'un champ magnétique, le passage de l'hamiltonien de base à cet hamiltonien modèle avec des coefficients tunnels complexes est loin d'être évident. Les limitations de cette *substitution de Peierls* ont été discutées par plusieurs auteurs (Luttinger 1951; Nenciu 1991); toutefois, dans le contexte de la simulation du magnétisme par des atomes froids, ces limitations ne sont pas pertinentes car nous allons chercher à reproduire directement l'hamiltonien modèle (6.21).

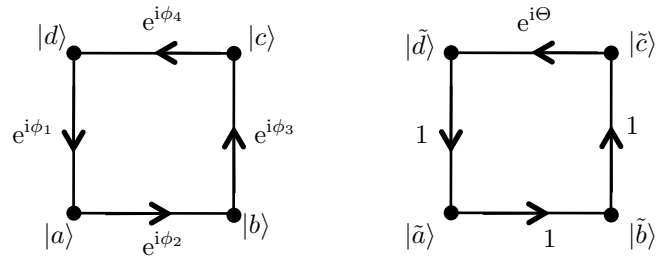


FIGURE 6.3. Principe d'un changement de jauge, où on redéfinit les états de la particule pour « concentrer » la phase des coefficients tunnel sur un lien particulier de la cellule.

plaquette, mais on peut bien sûr choisir de placer ce coefficient tunnel $J e^{i\Theta}$ sur n'importe quel autre côté, l'important étant que sa phase soit égale à Θ .

En généralisant cet argument, on peut montrer que les quantités invariantes de jauge pour un réseau carré infini sont les sommes

$$\begin{aligned} \frac{q}{\hbar} \Phi_{j,l} &= \phi(j,l \rightarrow j+1,l) + \phi(j+1,l \rightarrow j+1,l+1) \\ &+ \phi(j+1,l+1 \rightarrow j,l+1) + \phi(j,l+1 \rightarrow j,l). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Chaque somme représente la phase accumulée dans le trajet autour d'une plaquette donnée du réseau (figure 6.4), en l'occurrence la plaquette avec le site (j,l) dans son coin inférieur gauche. Tous les choix des $\phi(j,l \rightarrow j \pm 1,l)$, $\phi(j,l \rightarrow j, l \pm 1)$ conduisant au même ensemble $\{\Phi_{j,l}\}$ seront équivalents. La signification physique de $\Phi_{j,l}$ est, comme dans le cas continu, le flux du champ magnétique à travers la plaquette considérée.

Pour montrer comment ce résultat peut être mis en pratique, adoptons une stratégie directement inspirée de ce que nous avons fait pour la plaquette carrée isolée de la figure 6.3. Partons d'un réseau carré infini, sur lequel chaque lien correspond à un coefficient tunnel *a priori* complexe.

- Partant du site $(j,l) = (0,0)$ (figure 6.5a), on peut commencer par modifier la phase de tous les sites de la ligne horizontale $l = 0$ (sauf le site $|w_{0,0}\rangle$ qui sert de point de départ)

$$|w_{j,0}\rangle \rightarrow |\tilde{w}_{j,0}\rangle, \quad j \neq 0, \quad (6.18)$$

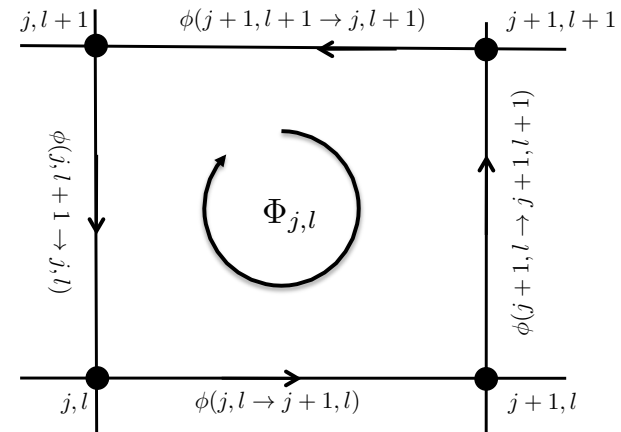


FIGURE 6.4. Pour chaque plaquette, les phases $\phi(j,l \rightarrow j',l')$ intervenant dans les éléments de matrice tunnel entre proches voisins peuvent être sommées pour former la quantité invariante de jauge $(q/\hbar) \Phi_{j,l}$, cf. (6.17). La quantité $\Phi_{j,l}$ représente le flux du champ magnétique à travers cette plaquette.

avec par exemple

$$|\tilde{w}_{1,0}\rangle = e^{i\phi_{00 \rightarrow 1,0}} |w_{1,0}\rangle, \quad |\tilde{w}_{2,0}\rangle = e^{i(\phi_{00 \rightarrow 1,0} + \phi_{1,0 \rightarrow 2,0})} |w_{2,0}\rangle, \dots$$

de sorte que les coefficients tunnel de cette ligne horizontale $l = 0$ deviennent réels.

- L'expression de chaque état $|\tilde{w}_{j,0}\rangle$ étant alors fixée, on peut considérer chaque ligne verticale et redéfinir la phase des coefficients des sites le long de chaque ligne

$$|w_{j,l}\rangle \rightarrow |\tilde{w}_{j,l}\rangle, \quad l \neq 0, \quad (6.19)$$

pour que les coefficients tunnel associés à tous les liens verticaux soient également réels (figure 6.5b).

Au terme de cette procédure, la phase de chaque état $|w_{j,l}\rangle$ a été redéfinie de manière unique ; tous les liens verticaux sont réels, et la phase des liens horizontaux est fixée de manière unique (en accord avec (6.17)), avec une phase nulle pour la ligne horizontale $l = 0$.

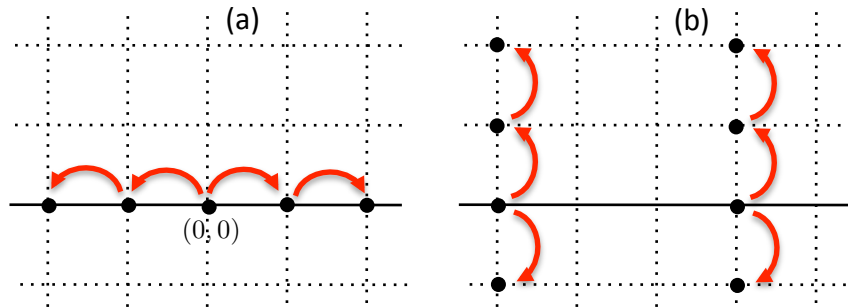


FIGURE 6.5. Procédure pour fixer la phase des coefficients tunnels de manière unique dans un réseau carré. (a) On redéfinit la phase des états de la ligne horizontale $l = 0$ pour que les coefficients tunnel le long de cette ligne soient réels. (b) On redéfinit la phase des états en dehors de la ligne $l = 0$ pour que tous les coefficients tunnels le long des liens verticaux soient réels. Les phases liées à la présence du champ magnétique sont alors concentrées sur les liens horizontaux (en dehors de la ligne $l = 0$).

1-4 Jauge de Landau

Considérons à partir de maintenant un champ magnétique uniforme B , pour lequel tous les flux $\Phi_{j,l}$ sont identiques. On peut faire un choix similaire à la jauge de Landau, selon laquelle le potentiel vecteur est aligné selon une direction de l'espace, x ou y . Choisissons par exemple le potentiel vecteur parallèle à l'axe x dans (6.10), ce qui correspond pour le cas continu à $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$. Ceci revient à prendre toutes les phases des transitions verticales $\phi(j, l \rightarrow j, l + 1)$ nulles et à choisir les phases dans la direction horizontale $\phi(j, l \rightarrow j \pm 1, l)$ linéaires vis à vis de l :

$$\phi(j, l \rightarrow j, l + 1) = 0, \quad \phi(j, l \rightarrow j \pm 1, l) = \pm 2\pi\alpha l. \quad (6.20)$$

L'hamiltonien que nous allons considérer dans la suite s'écrit donc :

$$\hat{H} = -J \sum_{j,l} (e^{i2\pi\alpha l} |w_{j+1,l}\rangle \langle w_{j,l}| + |w_{j,l+1}\rangle \langle w_{j,l}|) + \text{h.c.} \quad (6.21)$$

L'incrément de phase $2\pi\alpha$ caractérise entièrement le problème. Puisqu'une phase est définie modulo 2π , on peut restreindre α à l'intervalle

$[0, 1[$ (voire même $[0, 1/2]$ puisque α et $1 - \alpha$ représentent des situations équivalentes par inversion $x \rightarrow -x$). Ce nombre α est directement relié au flux Φ du champ magnétique à travers une plaquette :

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \frac{q}{\hbar} \Phi = \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (6.22)$$

déjà introduit en (6.2). Comme nous l'avons signalé en introduction, pour des réseaux cristallins « réels », la maille du réseau est de l'ordre de l'ångström et les champs magnétiques les plus grands sont de l'ordre de 50 Teslas, ce qui restreint α à des valeurs ($\sim 10^{-4}$) faibles devant 1. Les atomes froids dans des réseaux optiques constituent un moyen (parmi d'autres), pour aller explorer une partie plus grande du domaine de variation de α .

2 Le papillon de Hofstadter

L'hamiltonien en présence de champ magnétique (6.21) est remarquablement proche de la version à champ nul (6.8). Néanmoins, le facteur de phase $e^{i2\pi\alpha l}$ modifie considérablement le spectre en énergie et la forme des états propres. Nous n'allons pas résoudre entièrement ce problème, mais nous allons donner quelques indications ainsi que les résultats principaux.

2-1 L'équation de Harper

Notons tout d'abord qu'avec le choix de jauge de Landau que nous avons fait, nous n'avons pas brisé l'invariance par translation de a le long de l'axe horizontal. On peut donc toujours chercher les fonctions propres de l'hamiltonien sous forme de fonctions de Bloch² selon l'axe x :

$$|\Psi\rangle = \sum_{j,l} C_l e^{ijaq_x} |w_{j,l}\rangle, \quad (6.23)$$

les coefficients C_l étant à ce stade inconnus. Pour les déterminer, on écrit l'équation aux valeurs propres pour $|\Psi\rangle$ et on obtient l'équation de Harper

$$C_{l-1} + 2C_l \cos(2\pi\alpha l - aq_x) + C_{l+1} = -(E/J) C_l. \quad (6.24)$$

2. tout comme on avait cherché les états propres en jauge de Landau sous forme d'ondes planes dans une direction.

On s'est donc ramené à la diagonalisation d'une matrice tri-diagonale, bien adaptée à une résolution numérique.

2-2 Le spectre de Hofstadter

Une classe importante de solutions porte sur le cas où α est un nombre rationnel : $\alpha = p'/p$, où p et p' sont deux entiers. On constate alors que le problème redevient également invariant par translation le long de l'axe vertical, mais avec une période spatiale augmentée, pa au lieu de a . En effet, on a dans ce cas

$$\phi(j, l+p \rightarrow j+1, l+p) = 2\pi\alpha(l+p) = 2\pi\alpha l + 2\pi p' = \phi(j, l \rightarrow j+1, l) \quad (6.25)$$

où la dernière égalité est vraie modulo 2π . On retrouve alors un problème de particule en mouvement dans un réseau périodique, mais avec une cellule unité de taille $a \times (pa)$ et p sites par cellule unité. On sait alors que la bande fondamentale de largeur $8J$ va se fragmenter en p sous-bandes, généralement séparées par des gaps³.

Exemple du flux 1/3. Pour illustrer la méthode générale, considérons l'exemple du flux $\alpha = 1/3$. La cellule unité, qui a pour taille a selon la direction x et $3a$ selon la direction y , comporte 3 sites, notés $|A\rangle, |B\rangle, |C\rangle$ sur la figure 6.6. Chaque cellule est repérée par les indices j, l , avec par convention le site A au point $a(j\mathbf{u}_x + 3l\mathbf{u}_y)$. Cherchons les états propres de l'hamiltonien sous la forme d'une fonction de Bloch repérée par le vecteur de Bloch $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$:

$$|\Psi_{\mathbf{q}}\rangle = \sum_{j,l} e^{ia(jq_x + 3lq_y)} (\alpha|A_{j,l}\rangle + \beta|B_{j,l}\rangle + \gamma|C_{j,l}\rangle) \quad (6.26)$$

avec

$$q_x \in]-\pi/a, \pi/a], \quad q_y \in]-\pi/(3a), \pi/(3a)]. \quad (6.27)$$

Les coefficients α, β, γ se déduisent de l'équation aux valeurs propres $\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$, ce qui revient à chercher les états propres de l'hamiltonien

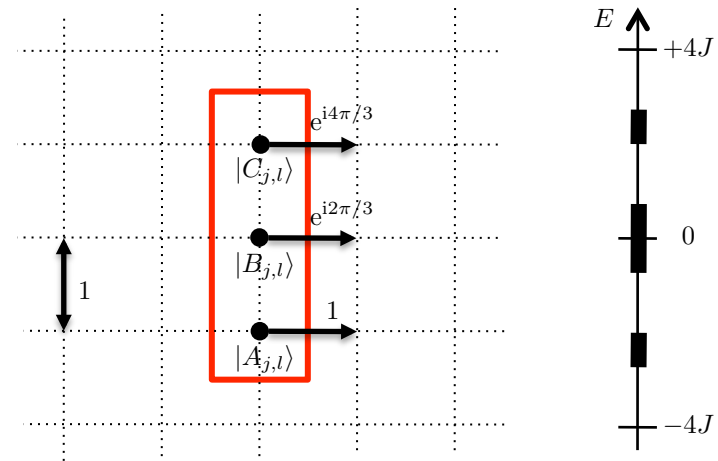


FIGURE 6.6. Choix d'une cellule unité de taille $a \times 3a$ pour un flux magnétique tel que $\alpha = 1/3$. On a représenté à droite les trois sous-bandes résultant de la fragmentation de la bande initiale de largeur $8J$.

dans l'espace réciproque :

$$\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{q}) = -J \begin{pmatrix} 2 \cos(aq_x) & 1 & e^{i3aq_y} \\ 1 & 2 \cos(aq_x + 2\pi/3) & 1 \\ e^{-i3aq_y} & 1 & 2 \cos(aq_x + 4\pi/3) \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

écrit ici dans la base $\{|A\rangle, |B\rangle, |C\rangle\}$. La diagonalisation de cette matrice 3×3 donne trois valeurs propres fonctions de \mathbf{q} . Quand on fait varier q_x et q_y dans les intervalles (6.27), on voit apparaître 3 bandes d'énergie représentées sur la figure 6.6. Le spectre d'énergie est symétrique par rapport à $E = 0$ et sa largeur totale est réduite par rapport à la valeur $8J$ trouvée en l'absence de champ magnétique. La sous-bande fondamentale a pour largeur $\sim 0.7J$ et elle est séparée de la sous-bande intermédiaire par la largeur $\sim 1.3J$.

Forme générale du spectre. Le résultat général pour le spectre de l'hamiltonien est tracé sur la figure 6.7. Ce spectre présente une structure fractale très particulière appelée *papillon de Hofstadter* (Hofstadter 1976). On peut

³. Ce gap est parfois remplacé par un contact de type *point de Dirac*. C'est par exemple le cas pour $\alpha = 1/2$.

comprendre l'apparition de cette structure fractale en comparant deux valeurs très proches de flux, par exemple $100/300$ et $101/300$ et en remarquant qu'elles conduisent à des spectres très différents, l'un avec 3 sous-bandes (figure 6.6), l'autre avec 301 sous-bandes. On pourra trouver une étude détaillée de cette structure fractale, de sa self-similarité et de ses symétries, ainsi que de nombreuses références sur le site web de Gilles Montambaux ⁴.

Vers des champs magnétiques faibles : $\alpha = 1/p$. On trouve dans ce cas p sous-bandes, et la largeur des sous-bandes tend vers 0 quand p augmente. Les bandes les plus basses sont à peu près équidistantes, avec un écart qui tend également vers 0, mais moins vite que leur largeur. Le spectre devient donc presque discret, ce qui rappelle bien sûr la structure en niveaux de Landau d'une particule libre. On peut vérifier quantitativement ce lien, en prenant pour masse de la particule la relation déduite de (6.9) en bas de bande :

$$E(\mathbf{q}) \approx Ja^2 \mathbf{q}^2 \equiv \frac{\hbar^2 \mathbf{q}^2}{2M_{\text{eff}}} \Rightarrow M_{\text{eff}} = \frac{\hbar^2}{2Ja^2} \quad (6.29)$$

et en vérifiant que l'écart entre niveaux est bien égal à la pulsation cyclotron $\omega_c = qB/M_{\text{eff}}$, qui s'écrit ici

$$\hbar\omega_c = 2J \frac{\Phi}{\Phi_0}. \quad (6.30)$$

2-3 Le nombre de Chern

Nous voyons sur le spectre de Hofstadter que les niveaux de Landau apparaissent naturellement comme la limite asymptotique $\Phi \rightarrow 0$ des sous-bandes trouvées pour un flux $\propto 1/p$, où p est un entier. Pour aller au-delà de cette simple remarque visuelle, il faut caractériser de manière quantitative les propriétés de ces sous-bandes pour voir dans quelle mesure elles conduisent globalement aux mêmes propriétés physiques que les niveaux de Landau pour une particule libre.

Une propriété remarquable des niveaux de Landau, indépendante de la forme précise de l'échantillon, est l'existence d'états de bords chiraux,

4. www.equipes.lps.u-psud.fr/Montambaux/cours-seminaires/hofstadter-tutorial.pdf

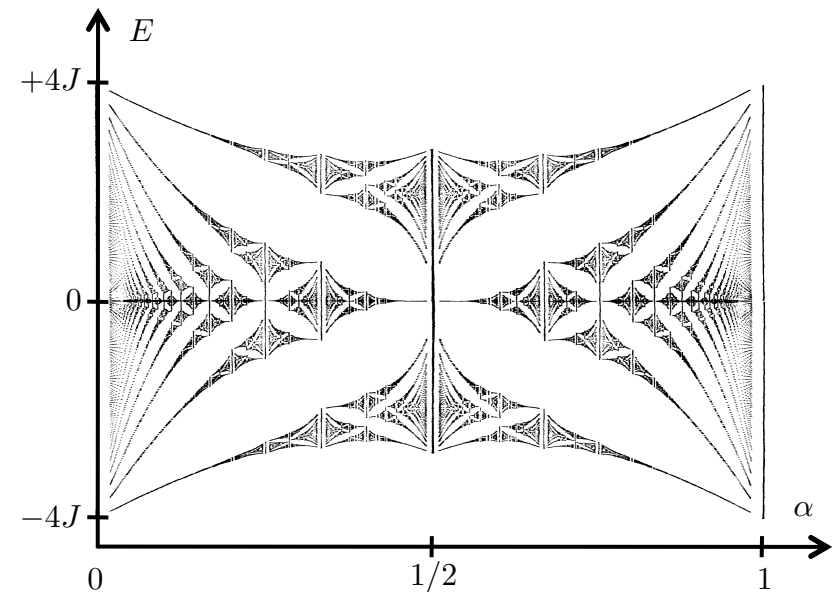


FIGURE 6.7. Papillon de Hofstadter : spectre en énergie d'une particule bougeant sur un réseau carré dans l'approximation des liaisons fortes, en présence d'un champ magnétique. Le flux Φ du champ magnétique à travers une plaquette du réseau est tel que $2\pi\alpha = \Phi/\Phi_0$ (Hofstadter 1976).

que nous avons pu relier à la notion de courant de Hall. Rappelons le résultat principal ; prenons un échantillon rectangulaire et considérons une situation où le niveau de Landau fondamental est complètement rempli de particules fermioniques sans interaction ; les autres niveaux de Landau sont supposés vides. Si on applique une différence de potentiel ΔE_x entre les deux bords de l'échantillon selon l'axe x , alors un courant de particules apparaît dans la direction y , de valeur $\dot{N}_y = \Delta E_x/h$. Obtient-on la même propriété pour des particules sur réseau ?

La réponse à cette question, trouvée par Thouless et al. (1982) [voir aussi Kohmoto (1989)], est contenue dans la valeur d'un invariant topologique,

le nombre de Chern C défini par :

$$J_y = \frac{C}{h} F_x, \quad (6.31)$$

où F_x est une force uniforme appliquée sur le réseau dans la direction x et J_y le courant de particules dans la direction perpendiculaire y . Quand on suppose la bande fondamentale remplie de fermions n'interagissant pas les uns avec les autres et les autres bandes vides, ce nombre de Chern vaut :

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{ZB} \Omega_z(\mathbf{q}) dq_x dq_y \quad (6.32)$$

où l'intégrale de la fonction $\Omega_z(\mathbf{q})$ porte sur la première zone de Brillouin. La définition de la fonction de $\Omega_z(\mathbf{q})$ est la transposition directe à l'espace réciproque de la notion de courbure de Berry que nous avons introduite dans l'espace des positions (Xiao et al. 2010). Puisqu'on dispose d'un hamiltonien périodique, on peut chercher ses états propres sous forme d'ondes de Bloch. En se restreignant à la bande fondamentale qui est par hypothèse la seule peuplée, ces ondes de Bloch sont notées

$$\Psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{q}} u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}), \quad (6.33)$$

où $u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})$ est une fonction périodique sur le réseau. On définit alors la connexion de Berry

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) = i\langle u_{\mathbf{q}} | \nabla_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{q}} \rangle, \quad (6.34)$$

qui permet d'évaluer la phase géométrique accumulée par une particule qui parcourt une boucle fermée dans l'espace des quasi-moments. La courbure de Berry est

$$\Omega(\mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{q}} \times \mathcal{A}(\mathbf{q}). \quad (6.35)$$

On peut montrer que le nombre de Chern ainsi défini est un entier positif, négatif ou nul. Quand cet entier est nul, le réseau est topologiquement trivial : une force appliquée selon x n'induit aucun courant macroscopique selon y . En revanche, s'il est non nul, on est en présence d'un phénomène du type *courant de Hall*, où une force dans une direction induit un courant dans une direction perpendiculaire.

Pour avoir une intuition de la signification de cet entier, revenons à un effet bien connu de la force appliquée F_x : elle va créer un phénomène

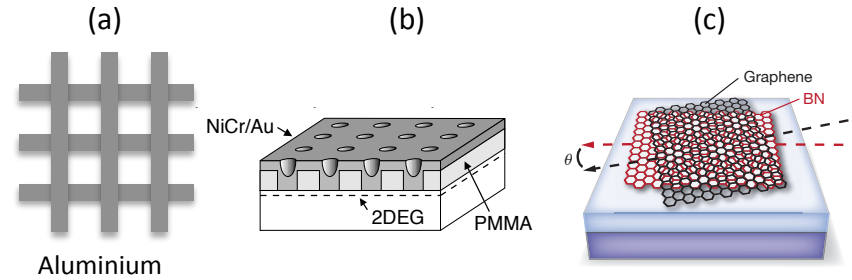


FIGURE 6.8. Systèmes utilisés expérimentalement pour explorer les propriétés magnétiques liées au papillon de Hofstadter (a) : Pannetier et al. (1984); (b) : Albrecht et al. (2001); (c) : Dean et al. (2013).

d'oscillations de Bloch⁵ selon la direction x , avec le défilement du quasi-moment $\dot{q}_x = F_x/h$. Pour un réseau de cellule unité rectangulaire $a \times b$, la période de l'oscillation de Bloch correspond au temps pour parcourir toute la zone de Brillouin (largeur $2\pi/a$), soit $\tau_B = h/F_x a$. Intéressons-nous au nombre de particules δN qui traversent une cellule unité, soit un segment horizontal de largeur a le long de l'axe x , en une période de Bloch τ_B :

$$\delta N = a J_y \tau_B = a \left(\frac{C}{h} F_x \right) \left(\frac{h}{F_x a} \right) = C. \quad (6.36)$$

Le nombre de particules qui traversent une cellule unité en une période Bloch est donc quantifié, et le nombre de Chern donne la valeur de ce quantum. Pour les valeurs rationnelles particulières $1/p$ du flux par plaquette, on trouve que le nombre de Chern de la sous-bande fondamentale vaut 1, tout comme pour le niveau de Landau fondamental trouvé en absence de réseau. Ces deux systèmes ont donc la même structure topologique et conduisent à des propriétés de conduction électrique équivalentes [voir Kohmoto (1989) pour une discussion du cas général $\alpha = p'/p$].

⁵. Des propositions de mesure du nombre de Chern exploitant cette dynamique dans des expériences d'atomes froids ont été faites par Price & Cooper (2012) et Dauphin & Goldman (2013).

2-4 Expériences sur des super-réseaux

Comme nous l'avons indiqué en introduction, la maille d'un réseau cristallin ordinaire est trop petite pour permettre d'atteindre le régime $\Phi/\Phi_0 \sim 1$ avec des champs magnétiques réalistes. Au cours des trente dernières années, plusieurs classes de systèmes – en dehors des gaz d'atomes froids – ont été étudiées pour approcher la physique du papillon de Hofstadter. Signalons en ici trois (cf. figure 6.8) :

- Pannetier et al. (1984) ont fabriqué un réseau carré de bandes d'aluminium de $2 \mu\text{m}$ de large et espacées de $6 \mu\text{m}$. Le réseau de surface 1cm^2 contient plus de 2 millions de sites *a priori* identiques. La mesure de la température critique de supraconductivité $T_c(B)$ a montré des variations rapides pour des valeurs rationnelles simples ($1/2, 2/5, 1/3, \dots$) du flux par plaquette.
- Albrecht et al. (2001) ont utilisé un gaz d'électrons bi-dimensionnel confiné dans une hétérostructure GaAs/AlGaAs. Un réseau périodique (période 120 nm) de NiCr/Au est déposé sur l'échantillon pour moduler spatialement le potentiel ressenti par les électrons. La mesure de la conductance de Hall a révélé la fragmentation du spectre en sous-bandes, comme attendu théoriquement.
- Dean et al. (2013) ont utilisé deux feuilles de graphène légèrement tournées l'une par rapport à l'autre pour réaliser une figure de Moiré, avec une périodicité de 15.5 nm. Ils utilisent eux aussi une mesure de la conductivité de Hall pour explorer le spectre d'énergie du papillon et mettre en évidence sa structure récursive.

3 Les réseaux optiques secoués

Pour implémenter l'hamiltonien (6.21) avec un gaz d'atomes froids dans un réseau optique, il faut trouver une procédure pour modifier le coefficient tunnel J et le rendre complexe, avec une phase qui dépend de l'indice repérant la direction verticale l . Nous avons déjà rencontré une technique similaire dans le cours de l'an dernier lorsque nous nous sommes intéressés à la localisation dynamique : nous avons vu que le coefficient tunnel dans un réseau 1D secoué pouvait être notablement modifié, voire

même changer de signe. C'est cette même technique que nous allons passer en revue maintenant.

Notons qu'il existe des méthodes différentes pour simuler un champ magnétique sur un réseau. Tout d'abord, on peut faire tourner physiquement le réseau dans l'espace : le passage dans le référentiel tournant garantit, comme pour un gaz homogène, l'apparition d'un champ magnétique effectif (Tung et al. 2006). On peut également moduler de manière chirale les paramètres d'un réseau de manière à simuler une rotation : par exemple, pour un réseau composé de cellules hexagonales, donc avec trois orientations possibles des côtés, on peut en principe moduler séparément les trois coefficients tunnels correspondants et obtenir après moyenne sur le temps un hamiltonien avec champ magnétique effectif (Kitagawa et al. 2010) [voir aussi l'article de Sørensen et al. (2005) pour une proposition voisine]. Il a également été proposé par Hemmerich & Smith (2007) d'utiliser des faisceaux additionnels pour générer des micro-rotors au niveau de chaque site du réseau ; ce schéma réalise en fait un champ magnétique alterné, dont le signe change d'une plaquette à l'autre [voir aussi Lim et al. (2008)].

3-1 Rappel : le cas unidimensionnel (version 1).

Pour préparer notre analyse, commençons par rappeler comment dans le cas à une dimension, on peut modifier le coefficient tunnel, voire lui conférer une phase complexe non nulle. Commençons par le réseau le plus simple possible, avec l'hamiltonien

$$\hat{H}_0 = -J \sum_j (|w_{j+1}\rangle \langle w_j| + |w_j\rangle \langle w_{j+1}|) \quad (6.37)$$

Supposons que l'on secoue ce réseau en remplaçant le potentiel statique périodique du réseau $V(x)$ par

$$\mathcal{V}(x, t) = V[x - x_0(t)], \quad (6.38)$$

où $x_0(t)$ est une fonction périodique du temps de pulsation Ω . Nous allons supposer ici que $\Omega \gg J/\hbar$, de sorte que la modulation est rapide comparée à la dynamique tunnel du réseau. Nous avons montré dans le cours de

l'an dernier que le fait de secouer le réseau revient, via la transformation unitaire générée par l'opérateur

$$\hat{U}(t) = \exp(ix_0(t)\hat{p}/\hbar), \quad (6.39)$$

à passer à l'hamiltonien avec un élément de matrice tunnel complexe :

$$\hat{H}(t) = -J e^{iMa\dot{x}_0(t)/\hbar} \sum_j |w_{j+1}\rangle \langle w_j| + \text{h.c.} \quad (6.40)$$

Écrivons le vecteur d'état sous la forme

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_j \alpha_j(t) |w_j\rangle \quad (6.41)$$

où l'évolution des amplitudes α_j est donnée par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \dot{\alpha}_j = -J \left(\alpha_{j+1} e^{-iMa\dot{x}_0(t)/\hbar} + \alpha_{j-1} e^{+iMa\dot{x}_0(t)/\hbar} \right). \quad (6.42)$$

Nous allons maintenant tirer parti du fait que les α_j sont des variables lentes pour moyenniser sur une période d'oscillation les coefficients de cette équation⁶. On obtient donc l'équation d'évolution approchée pour les α_j

$$i\hbar \dot{\alpha}_j = -\bar{J}^* \alpha_{j+1} - \bar{J} \alpha_{j-1} \quad (6.43)$$

avec un coefficient tunnel renormalisé

$$\bar{J} = J \langle e^{iMa\dot{x}_0(t)/\hbar} \rangle. \quad (6.44)$$

Modulation sinusoïdale. Pour une modulation sinusoïdale de la position du réseau du type

$$\frac{Ma}{\hbar} \dot{x}_0(t) = \xi_0 \sin(\Omega t + \phi) \quad (6.45)$$

où ξ_0 est un nombre sans dimension caractérisant l'amplitude de la modulation, on trouve que le coefficient tunnel moyen est réel et vaut⁷

$$\bar{J} = J \langle e^{i\xi_0 \sin(\Omega t + \phi)} \rangle = J \mathcal{J}_0(\xi_0) \quad (6.47)$$

6. Une approche plus rigoureuse, mais donnant le même résultat final, utilise l'approche de Floquet (cf. cours 2012-13).

7. On rappelle que

$$e^{ix \sin \theta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x) e^{in\theta}. \quad (6.46)$$

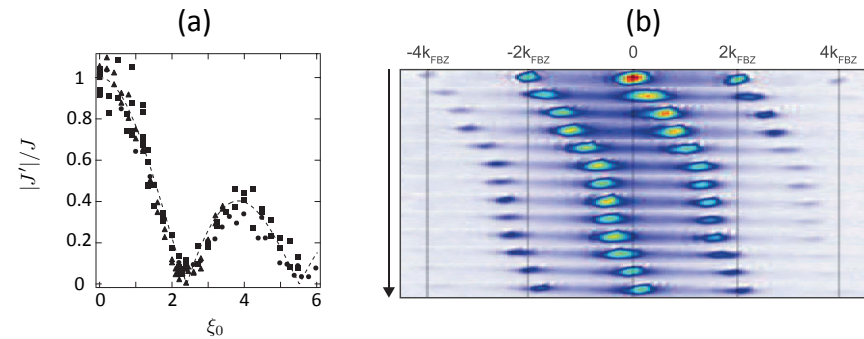


FIGURE 6.9. Exemples de modification de l'effet tunnel dans des réseaux à une dimension. (a) Changement du signe du coefficient tunnel par une modulation sinusoïdale du réseau (Lignier et al. 2007). (b) Changement de la phase du coefficient tunnel et décalage des pics en impulsion observés après temps de vol (Struck et al. 2012)).

où les J_n désignent les fonctions de Bessel de première espèce. Cette renormalisation du coefficient tunnel, avec son possible changement de signe, a été vue dans une expérience menée avec des atomes de rubidium par Lignier et al. (2007) (figure 6.9a).

Modulation asymétrique. Supposons maintenant qu'on prenne une modulation de la position du réseau qui ne soit pas invariante par renversement du temps, comme la dent de scie asymétrique de la figure 6.10 : le réseau se déplace à vitesse $v_1 > 0$ pendant une durée T_1 , puis à vitesse $v_2 < 0$ pendant une durée T_2 , avec

$$v_1 T_1 + v_2 T_2 = 0, \quad T = T_1 + T_2, \quad (6.48)$$

de sorte que le déplacement moyen sur une période T est nul. Dans ce cas, la moyenne sur le temps de la fonction $e^{iMa\dot{x}_0(t)/\hbar}$ est *a priori* complexe :

$$\frac{\bar{J}}{J} = \langle e^{iMa\dot{x}_0(t)/\hbar} \rangle = \frac{T_1}{T} e^{iMav_1/\hbar} + \frac{T_2}{T} e^{iMav_2/\hbar}. \quad (6.49)$$

Dans le cas 1D, une phase non nulle du coefficient tunnel se manifeste par un décalage de l'impulsion correspondant au bas de la bande considérée.

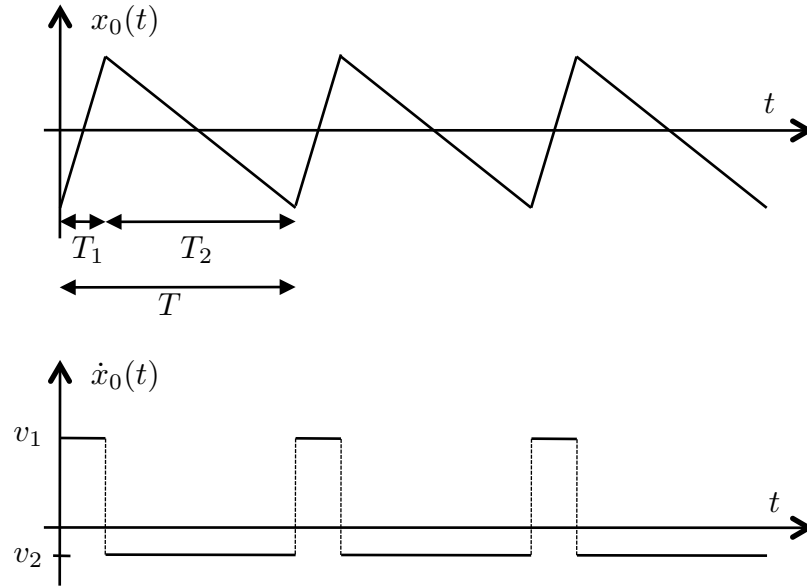


FIGURE 6.10. Modulation de la position d'un réseau optique 1D conduisant à un coefficient tunnel complexe (voir aussi Struck et al. (2012)).

Ce décalage, analogue à celui créé par un potentiel vecteur uniforme sur une particule libre et décrit au chapitre 5, a été observé par Struck et al. (2012) dans une expérience de temps de vol (figure 6.9b).

3-2 Le cas unidimensionnel (version 2).

Supposons maintenant que l'hamiltonien \hat{H}_0 contienne, en plus des termes tunnel, un potentiel linéaire statique

$$\hat{H}_0 = -J \sum_j (|w_{j+1}\rangle\langle w_j| + |w_j\rangle\langle w_{j+1}|) - \hbar\Omega_0 \sum_j j |w_j\rangle\langle w_j|. \quad (6.50)$$

En absence de modulation, on sait que les états propres sont les fonctions de Wannier–Stark localisées. Supposons maintenant que l'on module le ré-

seau de manière sinusoïdale avec une pulsation Ω voisine de (ou égale à) Ω_0 . On s'attend à induire une résonance entre sites adjacents qui va restaurer la conduction sur le réseau. Pour confirmer cette intuition, procédons comme ci-dessus ; nous écrivons le vecteur d'état à l'instant t sous la forme

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_j \alpha_j(t) e^{ij\Omega_0 t} |w_j\rangle, \quad (6.51)$$

et déduisons de l'équation de Schrödinger obtenue après la transformation unitaire (6.39) l'évolution des amplitudes de probabilité α_j

$$i \hbar \dot{\alpha}_j = -J \left(\alpha_{j+1} e^{-i(Ma\dot{x}_0(t)/\hbar - \Omega_0 t)} + \alpha_{j-1} e^{+i(Ma\dot{x}_0(t)/\hbar - \Omega_0 t)} \right). \quad (6.52)$$

Pour

$$\Omega = \Omega_0, \quad \frac{Ma}{\hbar} \dot{x}_0(t) = \xi_0 \sin(\Omega t + \phi), \quad (6.53)$$

on obtient de nouveau, après moyenne sur le temps, une équation d'évolution pour les α_j qui est identique à celle d'un réseau statique :

$$i \hbar \dot{\alpha}_j = -\bar{J}^* \alpha_{j+1} - \bar{J} \alpha_{j-1} \quad (6.54)$$

avec un coefficient tunnel renormalisé complexe :

$$\bar{J} = J \langle e^{i[\xi_0 \sin(\Omega t + \phi) - \Omega_0 t]} \rangle = J \mathcal{J}_1(\xi_0) e^{i\phi}. \quad (6.55)$$

On a donc réussi par cette procédure à « imprimer » la phase ϕ de la modulation sur le coefficient tunnel \bar{J} , ce qui était le but recherché : si cette méthode peut se généraliser à 2D, on disposera d'un moyen pour simuler un champ magnétique non nul sur le réseau.

3-3 Le cas bi-dimensionnel.

Nous avons vu dans ce qui précède deux manières de rendre le coefficient tunnel complexe dans un problème uni-dimensionnel. Elles peuvent toutes les deux se généraliser à deux dimensions, mais conduisent à des résultats différents.

- La méthode de la modulation asymétrique de la figure 6.10 est généralisable par exemple à un réseau triangulaire⁸ (Struck et al. 2013). En pratique, on choisit une modulation qui fait tourner chaque site du réseau sur une orbite fermée. Cette méthode conduit alors à un flux alterné, avec par exemple une phase positive pour les triangles « pointe en haut » et une phase négative pour les triangles « pointe en bas ».
- La méthode vue en § 3-2, combinant réseau tilté et modulation résonante, présente certaines difficultés à être transposée telle quelle [voir par exemple la proposition de Kolovsky (2011) et sa critique par Creffield & Sols (2013)]. Pour contourner ces difficultés, il vaut mieux abandonner l'idée d'une modulation globale du réseau, où tous les sites bougent de la même quantité $r_0(t)$, pour passer à une modulation locale, où chaque site j, l bouge de manière différente de ses voisins. C'est ce type de modulation que nous allons maintenant explorer (Aidelsburger et al. 2013; Miyake et al. 2013).

Partons d'un réseau « tilté » dans la direction horizontale, c'est-à-dire le réseau de base auquel on ajoute un potentiel linéaire constant qui déplace l'énergie du site (j, l) de la quantité $j \hbar \Omega_0$:

$$\hat{H}_0 = \sum_{j,l} j \hbar \Omega_0 |w_{j,l}\rangle \langle w_{j,l}| - J \sum_{j,l} (|w_{j+1,l}\rangle \langle w_{j,l}| + |w_{j,l+1}\rangle \langle w_{j,l}|) + \text{h.c.} \quad (6.56)$$

Nous allons supposer dans ce qui suit que $\hbar \Omega_0 \gg J$, ce qui signifie que l'effet tunnel le long de la direction x est pratiquement inhibé (les fonctions de Wannier–Stark coïncident avec les fonctions de Wannier), alors que l'effet tunnel selon y est inchangé.

Ajoutons à ce terme statique un potentiel dépendant du temps, qui vient moduler l'énergie de chaque site avec une pulsation Ω :

$$\hat{V}(t) = \sum_{j,l} \hbar \Omega_1 \sin(\Omega t - \theta_{j,l}). \quad (6.57)$$

Nous allons utiliser cette modulation pour rétablir un effet tunnel résonnant ($\Omega \sim \Omega_0$) dans la direction x , mais le coefficient tunnel correspondant

8. Elle ne fonctionne pas pour un réseau carré ou hexagonal, ou plus généralement pour un réseau dans lequel chaque plaquette possède des bords parallèles deux à deux, car les phases des deux coefficients tunnels correspondants s'annulent alors systématiquement.

va acquérir une phase qui sera relié à $\theta_{j,l}$. Notons qu'un tel potentiel peut être réalisé en superposant au réseau optique de base le potentiel dipolaire créé par une onde stationnaire composée elle-même de deux ondes lumineuses progressives de pulsation ω_1 et $\omega_2 = \omega_1 + \Omega$ et de vecteurs d'ondes \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_2 . La phase $\theta_{j,l}$ est alors linéaire en j et l :

$$\theta_{j,l} = (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r} \equiv \eta_x j + \eta_y l. \quad (6.58)$$

Considérons maintenant l'évolution du vecteur d'état

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{j,l} \alpha_{j,l}(t) |w_{j,l}\rangle \quad (6.59)$$

sous l'effet de l'hamiltonien total $\hat{H}_0 + \hat{V}(t)$:

$$i \dot{\alpha}_{j,l} = [j \Omega_0 + \Omega_1 \sin(\Omega t - \theta_{j,l})] \alpha_{j,l} - \frac{J}{\hbar} (\alpha_{j+1,l} + \alpha_{j-1,l} + \alpha_{j,l+1} + \alpha_{j,l-1}) \quad (6.60)$$

Cette équation contient des termes d'évolution rapide, avec les fréquences caractéristiques Ω et Ω_0 , et des termes plus lents avec la fréquence caractéristique J/\hbar . Pour travailler avec des variables lentes, il est commode d'introduire

$$\tilde{\alpha}_{j,l}(t) = \alpha_{j,l}(t) \exp \left\{ i \left[j \Omega_0 t - \frac{\Omega_1}{\Omega} \cos(\Omega t - \theta_{j,l}) \right] \right\}, \quad (6.61)$$

qui conduit à l'équation pour les variables tildées

$$i \dot{\tilde{\alpha}}_{j,l} = -\frac{J}{\hbar} \left[F(j, l, t) \tilde{\alpha}_{j+1,l} + G(j, l, t) \tilde{\alpha}_{j,l+1} + \dots \right] \quad (6.62)$$

où les points de suspension correspondent aux transitions $(j, l) \rightarrow (j-1, l)$ et $(j, l) \rightarrow (j, l-1)$.

Puisqu'on s'intéresse maintenant à des variables lentes, on peut moyenner les coefficients $F(j, l, t)$ et $G(j, l, t)$ sur une période de l'oscillation forcée $2\pi/\Omega$ en se plaçant exactement à la condition de résonance $\Omega = \Omega_0$. On trouve :

$$\begin{aligned} \langle F(j, l, t) \rangle &= \left\langle \exp \left\{ i \left[-\Omega_0 t + \frac{\Omega_1}{\Omega} (\cos(\Omega t - \theta_{j+1,l}) - \cos(\Omega t - \theta_{j,l})) \right] \right\} \right\rangle \\ &= \left\langle e^{-i\Omega_0 t} \exp \left[2i \frac{\Omega_1}{\Omega} \sin((\theta_{j+1,l} - \theta_{j,l})/2) \sin(\Omega t - (\theta_{j,l} + \theta_{j+1,l})/2) \right] \right\rangle \\ &= \mathcal{J}_1 \left(\frac{2\Omega_1}{\Omega} \sin(\eta_x/2) \right) e^{-i\theta_{j,l}} \end{aligned} \quad (6.63)$$

où on a utilisé $\theta_{j+1,l} - \theta_{j,l} = \eta_x$ et $(\theta_{j,l} + \theta_{j+1,l})/2 = \theta_{j,l} + \eta_x/2$ (la phase globale $e^{i\eta_x/2}$ est ensuite omise). De même, on obtient

$$\langle G(j, l, t) \rangle = \mathcal{J}_0 \left(\frac{2\Omega_1}{\Omega} \sin(\eta_y/2) \right) \quad (6.64)$$

si bien que l'hamiltonien effectif après moyenne sur une période temporelle s'écrit :

$$\hat{H} = -J_x \sum_{j,l} (e^{-i\theta_{j,l}} |w_{j+1,l}\rangle \langle w_{j,l}| + \text{h.c.}) - J_y \sum_{j,l} (|w_{j,l+1}\rangle \langle w_{j,l}| + \text{h.c.}) \quad (6.65)$$

avec

$$J_x = J \mathcal{J}_1 \left(\frac{2\Omega_1}{\Omega} \sin(\eta_x/2) \right), \quad J_y = J \mathcal{J}_0 \left(\frac{2\Omega_1}{\Omega} \sin(\eta_y/2) \right). \quad (6.66)$$

Pour vérifier que cet hamiltonien correspond bien à ce que l'on cherche, on calcule finalement le flux sur une plaquette :

$$\begin{aligned} \frac{q}{h} \Phi_{j,l} &= \phi(j, l \rightarrow j+1, l) + \phi(j+1, l \rightarrow j+1, l+1) \\ &+ \phi(j+1, l+1 \rightarrow j, l+1) + \phi(j, l+1 \rightarrow j, l) \\ &= -\theta_{j,l} + \theta_{j,l+1} \\ &= \eta_y. \end{aligned} \quad (6.67)$$

On constate donc qu'il faut prendre à la fois $\eta_y \neq 0$ pour que ce flux soit lui-même non nul, et $\eta_x \neq 0$ pour le coefficient tunnel J_x soit non nul.

3-4 Exemple d'expériences avec un réseau secoué

Plusieurs expériences ont récemment montré la validité du principe permettant de générer un champ artificiel à partir d'un réseau secoué (Aidelsburger et al. 2013; Miyake et al. 2013; Struck et al. 2013). Nous montrons sur la figure 6.11 les résultats du groupe de Munich, obtenus en isolant à l'aide d'un super réseau des plaquettes de 2×2 sites dans le plan xy . La présence du champ magnétique artificiel est révélée par le mouvement cyclotron des atomes dans ces plaquettes, avec la chiralité attendue. Ces expériences ont ensuite été étendues au cas où les plaquettes sont connectées

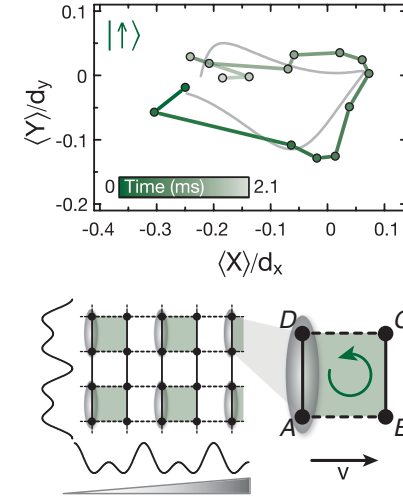


FIGURE 6.11. Trajectoires cyclotron obtenues dans un réseau secoué par Aidelsburger et al. (2013). La ligne grise représente un fit du résultat attendu théoriquement, obtenu à partir d'une résolution de l'équation de Schrödinger pour une plaquette. Chaque plaquette comprend 2×2 sites, et est obtenue grâce à deux super-réseaux dans les directions x et y .

entre elles selon une des deux directions de l'espace, réalisant alors une échelle. Dans cette géométrie d'échelle, les chercheurs de Munich ont mis en évidence un analogue de l'effet Meissner (Atala et al. 2014).

4 Réseaux combinant différents états internes

Le fait d'utiliser plusieurs états internes dans un réseau optique vient donner un degré de liberté très appréciable pour « imprimer » une phase lors du passage d'un site à l'autre du réseau. Le processus en jeu dans ce cas est l'effet tunnel assisté par laser, que nous allons présenter tout d'abord sur un système simple, uni-dimensionnel, avant de passer ensuite au cas d'un réseau infini à deux dimensions.

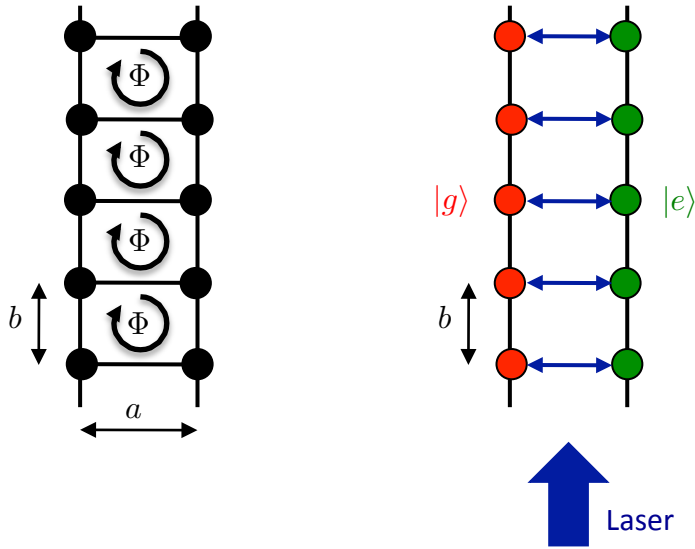


FIGURE 6.12. Gauche : échelle infinie de sites composée de deux montants séparés par une distance a . Les barreaux de l'échelle sont équidistants (écart b). Une particule chargée peut sauter d'un site à l'autre par effet tunnel. Un champ magnétique uniforme perpendiculaire à l'échelle induit un flux Φ par plaquette. Droite : simulation de cette échelle avec un double réseau optique, piégeant un atome dans un des deux états internes $|g\rangle$ et $|e\rangle$. Un faisceau laser se propageant selon la direction du réseau induit une transition $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$, analogue à l'effet tunnel le long des barreaux de l'échelle de gauche. La phase du laser $\phi = ky$ varie linéairement avec l'indice j des barreaux et « s'imprime » sur l'élément de matrice correspondant, ce qui permet de simuler un flux magnétique.

4-1 L'effet tunnel assisté par laser sur une échelle

Il s'agit de simuler une géométrie de sites situés sur une échelle à deux montants, représentée sur la figure 6.12. Cette échelle est plongée dans un champ magnétique et nous supposons qu'elle est bien décrite dans le cadre de l'approximation des liaisons fortes. Le champ magnétique est comme précédemment caractérisé par le flux Φ à travers chaque plaquette.

Pour cette simulation, nous allons utiliser un atome à deux états internes, notés $|g\rangle$ et $|e\rangle$. Un potentiel de piégeage, de type réseau optique le long de la direction y , permet de localiser les atomes sur les montants de l'échelle. Ce potentiel est choisi différent pour $|g\rangle$ et pour $|e\rangle$, ce qui permet de localiser chacun de ces deux états sur un montant différent ($|g\rangle$ à gauche, $|e\rangle$ à droite).

Nous supposons ces deux états internes stables (pas d'émission spontanée) et nous considérons une transition laser qui permet de provoquer une transition résonante entre eux. En pratique, si on considère des atomes « à deux électrons externes », comme l'Ytterbium, ces deux états correspondront respectivement à l'état fondamental (1S_0) et à l'état excité de très longue durée de vie (3P_0). Pour des atomes alcalins, on utilisera pour $|g\rangle$ et $|e\rangle$ deux sous-niveaux issus de l'état fondamental et la transition couplant ces deux états sera une transition Raman, impliquant un processus d'absorption et un processus d'émission stimulée.

Plaçons-nous dans un modèle à une bande et notons $|w_j^g\rangle$ et $|w_j^e\rangle$, $j \in \mathbb{Z}$, les états spatiaux pour les deux niveaux internes. Pour simplifier, nous supposons les fonctions d'onde correspondantes identiques, à une translation près :

$$w_j^g(\mathbf{r}) = w_0(x, y - jb), \quad w_j^e(\mathbf{r}) = w_0(x - a, y - jb). \quad (6.68)$$

En absence de laser, on est donc en présence de deux réseaux optiques 1D découplés, avec l'hamiltonien écrit dans l'approximation des liaisons fortes

$$\hat{H} = \hat{H}_g + \hat{H}_e, \quad \hat{H}_\alpha = -J_y \sum_{j \in \mathbb{Z}} |w_{j+1}^\alpha\rangle \langle w_j^\alpha| + \text{h.c.}, \quad \alpha = g, e. \quad (6.69)$$

Pour coupler ces deux réseaux, considérons un faisceau laser résonnant avec la transition $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$, avec un vecteur d'onde \mathbf{k} parallèle à l'axe y des

réseaux. Le couplage atome-laser s'écrit

$$\hat{V} = \frac{\hbar\kappa}{2} e^{iky} |e\rangle\langle g| + \text{h.c.} \quad (6.70)$$

Récrivons ce couplage à l'aide des $|w_j^\alpha\rangle$; compte tenu de la restriction à une seule bande, on a la relation de fermeture pour les espaces de Hilbert interne et externe

$$\hat{1} = |g\rangle\langle g| \otimes \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |w_j^g\rangle\langle w_j^g| \right) + |e\rangle\langle e| \otimes \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |w_j^e\rangle\langle w_j^e| \right). \quad (6.71)$$

En insérant cette relation de fermeture à gauche et à droite de \hat{V} , on obtient

$$\hat{V} = \sum_{j,j'} \mathcal{V}_{j,j'} |e, w_j\rangle\langle g, w_{j'}| + \text{h.c.} \quad (6.72)$$

avec

$$\mathcal{V}_{j,j'} = \frac{\hbar\kappa}{2} \int w_j^e(\mathbf{r}) e^{iky} w_{j'}^g(\mathbf{r}) d^2r. \quad (6.73)$$

Puisque nous nous sommes placés dans l'approximation des liaisons fortes, les fonctions d'onde $w_j^e(\mathbf{r})$ et $w_{j'}^g(\mathbf{r})$ sont bien localisées et on peut considérer que leur recouvrement est négligeable dès que l'on prend $j \neq j'$. On peut alors simplifier le coefficient $\mathcal{V}_{j,j'}$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{j,j'} &\approx \delta_{j,j'} \frac{\hbar\kappa}{2} \int w_0(x-a, y-jb) e^{iky} w_0(x, y-jb) d^2r \\ &\approx \delta_{j,j'} J_x e^{ijkb}, \end{aligned} \quad (6.74)$$

où le coefficient tunnel J_x est proportionnel à la fréquence de Rabi et au recouvrement des fonctions de Wannier pour les états internes $|g\rangle$ et $|e\rangle$:

$$J_x = \frac{\hbar\kappa}{2} \int w_0(x-a, y) e^{iky} w_0(x, y) d^2r. \quad (6.75)$$

Pour une fonction $w_0(x, y)$ invariante par réflexion $y \rightarrow -y$, ce coefficient J_x est réel :

$$J_x = \frac{\hbar\kappa}{2} \int w_0(x-a, y) \cos(ky) w_0(x, y) d^2r. \quad (6.76)$$

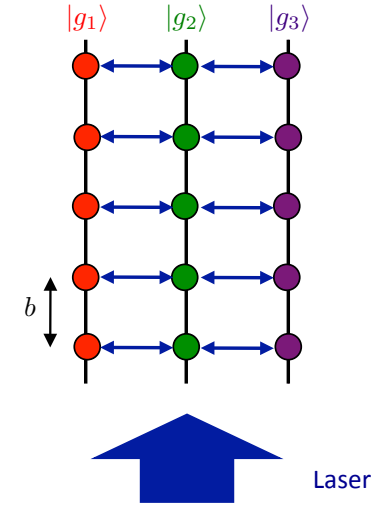


FIGURE 6.13. Simulation d'une double échelle avec un atome à trois niveaux internes (Celi et al. 2014). Ce schéma de niveau peut donner naissance à un spectre voisin du papillon de Hofstadter et à des états de bords correspondant à des courants opposés dans les états $|g_1\rangle$ et $|g_3\rangle$.

L'expression (6.74) correspond à ce que l'on cherche : on a un coefficient tunnel complexe dont la phase croît linéairement avec l'indice j de sorte que la phase totale accumulée sur le pourtour d'une plaquette est non nulle :

$$|g, j\rangle \xrightarrow{J_y} |g, j+1\rangle \xrightarrow{J_x e^{i(j+1)kb}} |e, j+1\rangle \xrightarrow{J_y} |e, j\rangle \xrightarrow{J_x e^{-i jkb}} |g, j\rangle \quad (6.77)$$

soit une phase

$$(j+1)kb - jkb = kb \quad (6.78)$$

qui est la même pour toutes les plaquettes : on simule ainsi une échelle à deux sites avec un champ magnétique uniforme tout le long de l'échelle.

Réseau de dimension artificielle. On peut remarquer que dans la simulation de l'échelle qui précède, rien n'impose à la longueur a d'être non

nulle. L'échelle peut avoir une double nature, réelle dans l'espace selon la direction y et fictive (n'impliquant que les degrés de liberté internes) selon la direction x . La nécessité d'avoir une longueur a non nulle ne viendra que plus loin, lorsqu'on cherchera à augmenter le nombre de sites dans la direction x . Partant de cette remarque, Celi et al. (2014) ont proposé d'étendre le traitement précédent à un atome à N états internes, $|g_n\rangle$, $n = 1, \dots, N$ en choisissant un couplage atome lumière qui induit les transitions

$$|g_n, j\rangle \xrightarrow{J_x e^{i j k b}} |g_{n+1}, j\rangle. \quad (6.79)$$

Ceci permet de simuler une échelle dont les barreaux sont situés dans l'espace réel et les N montants sont associés aux N états internes. Pour une implémentation pratique de ce dispositif, on peut prendre par exemple $N = 3$ et prendre pour les $|g_n\rangle$ les trois états Zeeman $m = 0, \pm 1$ d'un niveau fondamental atomique de moment cinétique 1 (figure 6.13).

4-2 Passage à un réseau bi-dimensionnel

Nous allons maintenant chercher à étendre le schéma de l'échelle considérée ci-dessus à un réseau bi-dimensionnel. Dans ce cas, la longueur a est bien réelle et on considère une série de réseaux 1D correspondant alternativement à l'état interne $|g\rangle$ et à l'état interne $|e\rangle$. On reconstitue ainsi un réseau à deux dimensions dont les sites (j, l) sont par convention occupés par un atome dans l'état $|g\rangle$ (resp. $|e\rangle$) si l'indice j du site est pair (resp. impair).

En analysant précisément les phases correspondant à l'effet tunnel assisté par laser, on constate que ce réseau correspond en fait à un flux alterné. Alors qu'un flux uniforme est obtenu en prenant de manière systématique

$$|j, l\rangle \xrightarrow{e^{i l k b}} |j + 1, l\rangle \quad (6.80)$$

on a ici (cf. figure 6.14)

$$|j, l\rangle \xrightarrow{e^{i l k b}} |j + 1, l\rangle \quad \text{si } j \text{ pair} \quad (6.81)$$

car cela correspond à une transition $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ (similaire à ce qu'on a vu ci-dessus) et

$$|j, l\rangle \xrightarrow{e^{-i l k b}} |j + 1, l\rangle \quad \text{si } j \text{ impair} \quad (6.82)$$

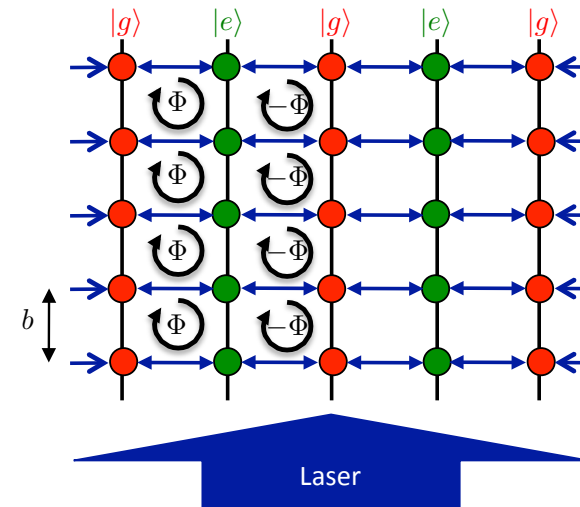


FIGURE 6.14. Réalisation d'un réseau carré à flux alterné : on utilise un seul faisceau lumineux pour générer l'effet tunnel assisté par laser.

correspondant à une transition $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$. La somme de la phase accumulée quand on parcourt une plaquette a donc un signe qui alterne d'une colonne à l'autre.

Ce réseau à flux alterné présente des propriétés intéressantes quand on prend en compte les interactions (Möller & Cooper 2010), mais il ne correspond pas à ce que la simulation du magnétisme homogène recherchée. Il reste à « rectifier » le champ magnétique pour obtenir un flux de même signe sur chaque plaquette.

4-3 Rectification du flux

Plusieurs techniques ont été proposées pour passer du flux magnétique alterné de la figure 6.14 à un flux homogène. La proposition initiale de Jaksch & Zoller (2003) faisait appel à l'application d'un potentiel supplémentaire linéaire pour lever la dégénérescence entre les différentes transitions $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ possibles. Une version légèrement différente, mieux ap-

propriété aux atomes alcalino-terreux qui sont les plus prometteurs pour ce type d'étude, a été proposée par Gerbier & Dalibard (2010). Son principe est esquissé sur la figure 6.15. Grâce à un super-réseau optique selon la direction x , de période double de celle du réseau principal, on module l'énergie des états internes $|g\rangle$ et $|e\rangle$ entre deux valeurs, correspondant aux disques pleins et aux disques creux de la figure 6.15. Les différentes transitions $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ sont assurées par des faisceaux lumineux se propageant selon $+u_y$ ou $-u_y$ et de fréquence bien choisie, pour assurer que la phase accumulée autour de chaque plaquette reste partout la même.

5 Remarques finales

Est-ce utile de mettre en jeu plusieurs états internes ?

Nous avons exploré dans cette section deux approches possibles pour réaliser un hamiltonien de type Hofstadter. La première n'utilise pas de transitions entre états internes atomiques et consiste à moduler dans le temps certains paramètres du réseau ; la phase de cette modulation va être transférée aux atomes et jouer le rôle de phase Aharonov-Bohm. La seconde approche utilise des transitions entre états internes induites par des faisceaux auxiliaires. Quand un atome absorbe un de ces photons auxiliaires, la phase du faisceau s'imprime sur la fonction d'onde atomique, ce qui génère l'effet recherché.

Comparons maintenant les avantages et inconvénients de ces deux méthodes. La première approche ne fait pas appel à des faisceaux lumineux proches de résonance et évite donc en principe tout problème de chauffage lié au phénomène d'émission spontanée de photons. En revanche, elle impose des contraintes assez fortes sur l'amplitude des coefficients tunnel réalisables. Pour chiffrer ces contraintes, introduisons le gap Δ entre la bande fondamentale avec laquelle on souhaite travailler et la première bande excitée. Toute notre analyse a été fondée sur un calcul mono-bande et elle n'est donc valable que si le taux de transfert vers la bande excitée est négligeable. Pour cela, il faut que le décalage en énergie $\hbar\Omega_0$ entre les deux fonctions de Wannier localisées sur deux sites adjacents soit petit devant le

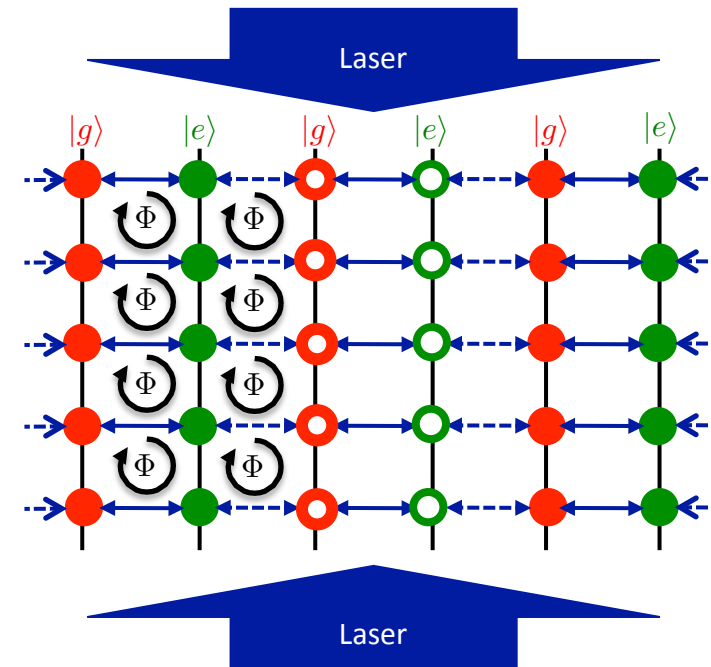


FIGURE 6.15. Simulation d'un flux uniforme avec des atomes à deux états internes $|g\rangle$ et $|e\rangle$ piégés dans un réseau optique. Un super-réseau dans la direction x module l'énergie des états $|g\rangle$ entre deux valeurs, représentées par des disques rouges alternativement pleins et creux. Il en va de même pour les états $|e\rangle$. On génère ainsi 4 fréquences de transitions différentes pour $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$. Deux de ces transitions, marquées par une double flèche en trait plein, sont induites par le faisceau lumineux venant du bas ; les deux autres, marquées par une double flèche en trait pointillé, sont induites par le faisceau lumineux venant du haut. De la sorte, le signe de la phase accumulée sur chaque plaquette est constant, ce qui correspond au flux uniforme recherché.

gap entre les deux bandes :

$$\hbar\Omega_0 \ll \Delta. \quad (6.83)$$

Nous avons vu que pour induire de manière efficace un effet tunnel entre sites adjacents, il fallait choisir la fréquence de modulation Ω voisine de Ω_0 . Cette fréquence Ω caractérise la partie rapide de l'évolution de la fonction d'onde et l'effet tunnel renormalisé

$$\bar{J} = J \mathcal{J}_1(\xi) e^{i\phi} \quad (6.84)$$

caractérise quant à lui la partie lente de cette évolution. Au final, on arrive donc à la hiérarchie d'inégalités

$$|\bar{J}| \leq J \ll \Omega \approx \Omega_0 \ll \Delta. \quad (6.85)$$

Le désaccord Δ ne peut pas être pris très grand devant l'énergie de recul, sinon l'effet tunnel J devient négligeable. L'ordre de grandeur des coefficients tunnel \bar{J} que l'on peut réaliser par cette méthode est donc par construction faible.

Pour des atomes alcalino-terreux, l'utilisation d'états internes peut se faire sans risque de chauffage par émission spontanée, car la durée de vie de l'état excité $|e\rangle$ est très grande devant toute durée réaliste d'une expérience. La contrainte principale est donc de ne pas peupler une bande excitée dans la transition $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$, ce qui impose de prendre une fréquence de Rabi κ petite devant Δ/\hbar . Le coefficient tunnel obtenu est alors de l'ordre de $\hbar\kappa$, avec un coefficient de réduction qui fait intervenir le recouvrement entre les fonctions de Wannier pour $|g\rangle$ et $|e\rangle$. On arrive donc à la série d'inégalités :

$$\bar{J} \leq \hbar\kappa \ll \Delta. \quad (6.86)$$

Cette série est moins contraignante que (6.85) et on peut donc s'attendre à des coefficients tunnels potentiellement plus grands pour cette approche qui tire profit de plusieurs états internes.

Notons pour terminer que nous n'avons pas pris en compte ici les effets à plusieurs particules ; ces derniers peuvent conduire à des effets notablement différents, selon que tous les atomes sont dans le même état interne ou que plusieurs états sont occupés, avec la possibilité d'avoir des collisions inélastiques entre atomes.

Tableau récapitulatif

Nous avons exploré au cours des trois derniers cours un certain nombre de méthodes pour simuler un magnétisme orbital ou un couplage spin-orbite avec des atomes neutres. Comme nous l'avons annoncé initialement, ces méthodes peuvent être classées selon au moins deux critères : (i) utilise-t-on ou non plusieurs états internes ? (ii) l'hamiltonien est-il ou non dépendant du temps ? Nous avons résumé ces différentes approches dans le tableau 6.16. Chaque case de ce tableau a été illustrée, parfois de plusieurs manières, dans ces cours⁹. Selon les espèces atomiques considérées et les phénomènes recherchés, on pourra privilégier l'une ou l'autre de ces approches, aucune ne s'étant encore imposée comme une stratégie universelle pour étudier l'ensemble des phénomènes liés au magnétisme orbital.

	Hamiltoniens indépendant du temps	Hamiltoniens dépendant du temps pulsation Ω
Pas d'utilisation d'états internes	Rotation à moment cinétique conservé	$\Omega \sim \omega_c$: rotation forcée avec agitateur tournant $\Omega \gg \omega_c$: réseaux secoués
Utilisation d'états internes	Phase de Berry Réseaux de flux Effet tunnel assisté par laser Couplage spin-orbite	Couplage spin-orbite

FIGURE 6.16. Classification des procédures pour générer du magnétisme orbital artificiel (pulsation cyclotron ω_c) ou un couplage spin-orbite.

⁹. à l'exception de la case en bas à droite. Pour cette dernière, on pourra consulter par exemple Xu et al. (2013); Anderson et al. (2013); Goldman & Dalibard (2014).

Références

- Aidelsburger, M., M. Atala, M. Lohse, J. T. Barreiro, B. Paredes & I. Bloch (2013), « Realization of the Hofstadter Hamiltonian with Ultracold Atoms in Optical Lattices », in *Phys. Rev. Lett.* 111 (18), p. 185301.
- Albrecht, C., J. H. Smet, K. von Klitzing, D. Weiss, V. Umansky & H. Schweizer (2001), « Evidence of Hofstadter's Fractal Energy Spectrum in the Quantized Hall Conductance », in *Phys. Rev. Lett.* 86 (1), pp. 147–150.
- Anderson, B. M., I. B. Spielman & G. Juzeliunas (2013), « Magnetically Generated Spin-Orbit Coupling for Ultracold Atoms », in *Phys. Rev. Lett.* 111 (12), p. 125301.
- Atala, M., M. Aidelsburger, M. Lohse, J. T. Barreiro, B. Paredes & I. Bloch (2014), « Observation of the Meissner effect with ultracold atoms in bosonic ladders », arXiv :1402.0819.
- Celi, A., P. Massignan, J. Ruseckas, N. Goldman, I. B. Spielman, G. Juzeliunas & M. Lewenstein (2014), « Synthetic Gauge Fields in Synthetic Dimensions », in *Phys. Rev. Lett.* 112, p. 043001.
- Creffield, C. E. & F. Sols (2013), « Comment on "Creating artificial magnetic fields for cold atoms by photon-assisted tunneling" », in *EPL* 101, p. 40001.
- Dauphin, Alexandre & Nathan Goldman (2013), « Extracting the Chern Number from the Dynamics of a Fermi Gas : Implementing a Quantum Hall Bar for Cold Atoms », in *Phys. Rev. Lett.* 111 (13), p. 135302.
- Dean, C. R., L. Wang, et al. (2013), « Hofstadter's butterfly and the fractal quantum Hall effect in moiré superlattices », in *Nature* 497, p. 598.
- Gerbier, Fabrice & Jean Dalibard (2010), « Gauge fields for ultracold atoms in optical superlattices », in *New Journal of Physics* 12.3, p. 033007.
- Goldman, N. & J. Dalibard (2014), « Periodically-driven quantum systems : Effective Hamiltonians and engineered gauge fields », arXiv :1404.4373.
- Hemmerich, A. & C. Morais Smith (2007), « Excitation of a d-Density Wave in an Optical Lattice with Driven Tunneling », in *Phys. Rev. Lett.* 99 (11), p. 113002.
- Hofstadter, D. R. (1976), « Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields », in *Phys. Rev. B* 14.6, pp. 2239–2249.
- Jaksch, D. & P. Zoller (2003), « Creation of effective magnetic fields in optical lattices : the Hofstadter butterfly for cold neutral atoms », in *New Journal of Physics* 5, p. 56.1.
- Kitagawa, Takuya, Erez Berg, Mark Rudner & Eugene Demler (2010), « Topological characterization of periodically driven quantum systems », in *Phys. Rev. B* 82 (23), p. 235114.
- Kohmoto, Mahito (1989), « Zero modes and the quantized Hall conductance of the two-dimensional lattice in a magnetic field », in *Phys. Rev. B* 39 (16), pp. 11943–11949.
- Kolovsky, A. R. (2011), « Creating artificial magnetic fields for cold atoms by photon-assisted tunneling », in *EPL* 93, p. 20003.
- Lignier, H., C. Sias, D. Ciampini, Y. Singh, A. Zenesini, O. Morsch & E. Arimondo (2007), « Dynamical Control of Matter-Wave Tunneling in Periodic Potentials », in *Phys. Rev. Lett.* 99 (22), p. 220403.
- Lim, Lih-King, C. Morais Smith & Andreas Hemmerich (2008), « Staggered-Vortex Superfluid of Ultracold Bosons in an Optical Lattice », in *Phys. Rev. Lett.* 100 (13), p. 130402.
- Luttinger, J. M. (1951), « The Effect of a Magnetic Field on Electrons in a Periodic Potential », in *Phys. Rev.* 84.4, pp. 814–817.
- Miyake, Hirokazu, Georgios A. Siviloglou, Colin J. Kennedy, William Cody Burton & Wolfgang Ketterle (2013), « Realizing the Harper Hamiltonian with Laser-Assisted Tunneling in Optical Lattices », in *Phys. Rev. Lett.* 111 (18), p. 185302.
- Möller, G. & N. R. Cooper (2010), « Condensed ground states of frustrated Bose-Hubbard models », in *Phys. Rev. A* 82 (6), p. 063625.
- Nenciu, G. (1991), « Dynamics of band electrons in electric and magnetic fields : rigorous justification of the effective Hamiltonians », in *Rev. Mod. Phys.* 63.1, p. 91.
- Pannetier, B., J. Chaussy, R. Rammal & J. C. Villegier (1984), « Experimental Fine Tuning of Frustration : Two-Dimensional Superconducting Network in a Magnetic Field », in *Phys. Rev. Lett.* 53 (19), pp. 1845–1848.
- Price, H. M. & N. R. Cooper (2012), « Mapping the Berry curvature from semiclassical dynamics in optical lattices », in *Phys. Rev. A* 85 (3), p. 033620.
- Sørensen, A. S., E. Demler & M. D. Lukin (2005), « Fractional Quantum Hall States of Atoms in Optical Lattices », in *Phys. Rev. Lett.* 94, p. 086803.
- Struck, J., C. Ölschläger, M. Weinberg, P. Hauke, J. Simonet, A. Eckardt, M. Lewenstein, K. Sengstock & P. Windpassinger (2012), « Tunable Gauge

- Potential for Neutral and Spinless Particles in Driven Optical Lattices », in *Phys. Rev. Lett.* 108 (22), p. 225304.
- Struck, J., M. Weinberg, et al. (2013), « Engineering Ising-XY spin-models in a triangular lattice using tunable artificial gauge fields », in *Nature Physics* 9, p. 738.
- Thouless, D. J., M. Kohmoto, M. P. Nightingale & M. den Nijs (1982), « Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential », in *Phys. Rev. Lett.* 49.6, pp. 405–408.
- Tung, S., V. Schweikhard & E. A. Cornell (2006), « Observation of Vortex Pinning in Bose-Einstein Condensates », in *Phys. Rev. Lett.* 97 (24), p. 240402.
- Xiao, Di, Ming-Che Chang & Qian Niu (2010), « Berry phase effects on electronic properties », in *Rev. Mod. Phys.* 82 (3), pp. 1959–2007.
- Xu, Zhi-Fang, Li You & Masahito Ueda (2013), « Atomic spin-orbit coupling synthesized with magnetic-field-gradient pulses », in *Phys. Rev. A* 87 (6), p. 063634.