

# Chapitre 5

## Magnétisme artificiel pour un atome isolé et couplage spin-orbite

### Sommaire

<b>1</b>	<b>Rappel des principales notions</b>	<b>2</b>
1-1	Hamiltonien atomique interne	2
1-2	Les états habillés	2
1-3	Les potentiels géométriques	3
<b>2</b>	<b>Le cas des ondes planes</b>	<b>3</b>
2-1	Que peut-on mesurer ?	4
2-2	Mise en évidence expérimentale	4
2-3	Traitement exact pour l'onde plane	6
<b>3</b>	<b>La courbure de Berry <math>B</math></b>	<b>7</b>
3-1	Le résultat général pour un atome à deux niveaux	7
3-2	Onde plane + gradient de désaccord	8
3-3	Mise en évidence expérimentale	10
<b>4</b>	<b>Champs de jauge non abéliens</b>	<b>11</b>
4-1	La force de Lorentz dans le cas non-abélien	11
4-2	Émergence de potentiels non abéliens	12
4-3	Le schéma de niveau multipode	13
<b>5</b>	<b>Le couplage spin-orbite</b>	<b>14</b>
5-1	Comment générer un couplage spin-orbite 2D	14
5-2	La physique du couplage spin-orbite	15
5-3	La version 1D du couplage spin-orbite	16

Nous continuons dans ce chapitre notre exploration de la physique des potentiels géométriques telle qu'elle peut être implémentée pour des atomes couplés au rayonnement. Nous allons montrer ici qu'il est véritablement possible de créer un potentiel vecteur non trivial sur un gaz atomique, correspondant à l'apparition d'un magnétisme orbital. La preuve de l'existence de ce magnétisme orbital sera, comme dans le cas d'une mise en rotation, l'observation de vortex quantifiés lorsque le gaz est dans un régime superfluide.

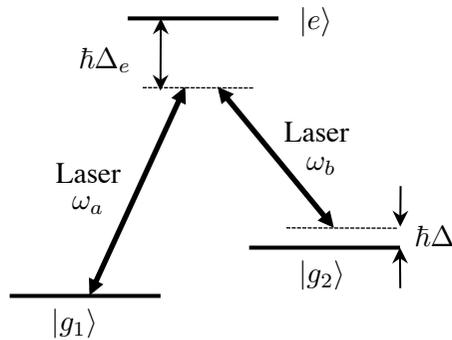
Nous aborderons ensuite un autre type de magnétisme, correspondant à un couplage spin-orbite. Il s'agira de remplacer le couplage magnétique envisagé jusqu'ici :

$$\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathcal{A}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (5.1)$$

où  $\mathcal{A}(\mathbf{r})$  est une fonction statique, par un terme du type

$$\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{S}} \quad (5.2)$$

où les  $\hat{S}_i$ ,  $i = x, y, z$  sont les opérateurs aux composantes de spin de l'atome. Ce couplage spin-orbite peut conduire à de nombreux phénomènes originaux, à la fois sur le plan fondamental avec la possibilité de simuler des nouvelles phases de la matière comme les isolants topologiques, et sur le plan appliqué avec des analogies fortes avec les dispositifs de spintronique.



**FIGURE 5.1.** Couplage de deux états  $|g_1\rangle$  et  $|g_2\rangle$  issus d'un niveau fondamental atomique, par une transition Raman. Si le désaccord à l'état excité  $|e\rangle$  est grand devant les fréquences de Rabi  $\kappa_a$  et  $\kappa_b$  caractérisant le couplage aux ondes lumineuses, on peut éliminer perturbativement  $|e\rangle$  et se ramener à un problème « à deux niveaux » dans le sous-espace  $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle\}$ .

## 1 Rappel des principales notions

### 1-1 Hamiltonien atomique interne

Nous allons considérer dans ce qui suit un atome « à deux niveaux internes ». Ce système modélise par exemple la configuration représentée sur la figure 5.1, sur laquelle on a isolé deux états  $|g_1\rangle$  et  $|g_2\rangle$  du niveau fondamental, ces deux états étant couplés par une transition Raman impliquant l'absorption d'un photon d'un faisceau laser depuis  $|g_1\rangle$ , passage dans un état excité  $|e\rangle$  et émission stimulée dans un autre faisceau pour aller vers  $|g_2\rangle$ . Comme expliqué dans le chapitre précédent, nous supposons ici que les faisceaux lumineux ne sont pas résonnants avec les transitions  $|g_i\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ , de sorte que l'état excité  $|e\rangle$  n'est jamais significativement peuplé dans ce processus. On peut alors restreindre la dynamique interne de l'atome au sous-espace de dimension 2 engendré par  $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle\}$ .

Nous noterons  $\kappa$  la fréquence de Rabi effective associée à cette transition, qui fait intervenir les fréquences de Rabi associées à chaque faisceau ainsi que le désaccord par rapport au niveau excité  $|e\rangle$  (cf. chapitre précé-

dent) :

$$\kappa = \frac{\kappa_a \kappa_b^*}{2\Delta_e}. \quad (5.3)$$

Le couplage atome-laser s'écrit donc :

$$\hat{V}_{AL} = \frac{\hbar\kappa}{2} |g_2\rangle\langle g_1| + \frac{\hbar\kappa^*}{2} |g_1\rangle\langle g_2|. \quad (5.4)$$

Nous introduisons également le désaccord  $\hbar\Delta$  entre l'énergie de la transition atomique  $E_2 - E_1$  et l'énergie  $\hbar(\omega_a - \omega_b)$  fournie par la lumière dans une telle transition. Après élimination des termes dépendant explicitement du temps à la pulsation  $\omega_a - \omega_b$  (« passage dans le référentiel tournant »), l'hamiltonien interne atomique s'écrit dans la base  $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle\}$  sous forme d'une matrice  $2 \times 2$  :

$$\hat{H}_{interne} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \kappa^* \\ \kappa & -\Delta \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Rappelons que cette matrice peut dépendre *a priori* de la position du centre de masse de l'atome par l'intermédiaire de plusieurs paramètres :

- les phases des faisceaux lasers incidents sur l'atome, qui apparaissent dans la phase du coefficient  $\kappa$ ,
- l'intensité lumineuse proportionnelle à  $|\kappa|^2$ ,
- une possible variation spatiale du désaccord  $\Delta$ , obtenue par exemple en plongeant l'atome dans un champ magnétique non homogène.

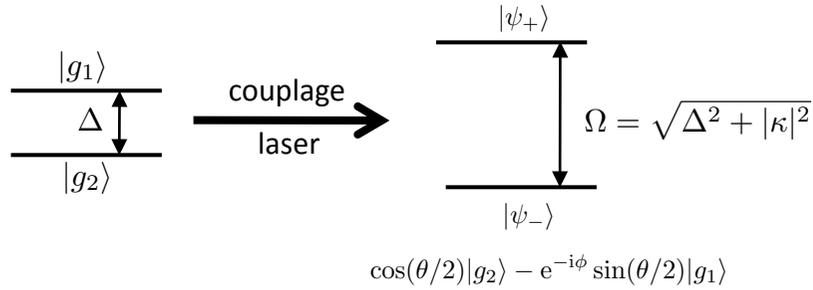
### 1-2 Les états habillés

Nous appelons états habillés les états propres de l'hamiltonien interne (5.5). Pour trouver ces états habillés, il est commode de mettre l'hamiltonien interne sous la forme

$$\hat{H}_{interne} = \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\phi} \sin\theta \\ e^{i\phi} \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

avec pour la fréquence de Rabi généralisée  $\Omega$ , l'angle de mélange  $\theta$  et l'angle de phase  $\phi$  :

$$\Omega = (\Delta^2 + |\kappa|^2)^{1/2}, \quad \cos\theta = \frac{\Delta}{\Omega}, \quad \sin\theta = \frac{|\kappa|}{\Omega}, \quad \kappa = |\kappa| e^{i\phi}, \quad (5.7)$$



**FIGURE 5.2.** Couplage entre les deux états « nus » (après le « passage dans le référentiel tournant » à la pulsation  $\omega_a - \omega_b$ ), donnant naissance aux états habillés  $|\psi_{\pm}\rangle$ , combinaisons linéaires des états nus avec des amplitudes dépendant du point de l'espace considéré.

où  $\Omega$ ,  $\theta$  et  $\phi$  sont des fonction de  $\mathbf{r}$ , avec  $\theta \in [0, \pi]$ .

Les deux états habillés sont alors (à une phase près)

$$|\psi_+\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{-i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad |\psi_-\rangle = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

qui se raccordent respectivement à  $|g_1\rangle$  et  $|g_2\rangle$  quand la pulsation de Rabi  $\kappa$  tend vers 0, avec  $\Delta > 0$ . Les énergies associées sont (voir figure 5.2)

$$E_{\pm} = \pm \frac{\hbar\Omega}{2}. \quad (5.9)$$

### 1-3 Les potentiels géométriques

Nous prenons maintenant en compte le mouvement du centre de masse de l'atome, que nous décrivons quantiquement. Nous allons restreindre notre analyse au cas où l'atome est préparé à l'instant initial dans un de ces états habillés, par exemple  $|\psi_-\rangle$  :

$$\Psi(\mathbf{r}, 0) = \phi_-(\mathbf{r}, 0) |\psi_-(\mathbf{r})\rangle. \quad (5.10)$$

Nous supposons que les conditions de validité de l'approximation adiabatique sont remplies (nous y reviendrons) et l'atome suit donc adiabatiquement cet état habillé à chaque instant :

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \phi_-(\mathbf{r}, t) |\psi_-(\mathbf{r})\rangle. \quad (5.11)$$

L'évolution de la fonction d'onde  $\phi_-(\mathbf{r}, t)$  est donnée par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \phi_-}{\partial t} = \left[ \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \mathcal{A}_-(\mathbf{r}))^2}{2M} + E_-(\mathbf{r}) + \mathcal{V}_-(\mathbf{r}) \right] \phi_-(\mathbf{r}, t), \quad (5.12)$$

avec les potentiels géométriques vecteurs et scalaires

$$\mathcal{A}_-(\mathbf{r}) = i\hbar \langle \psi_- | \nabla \psi_- \rangle, \quad \mathcal{V}_-(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{2M} |\langle \psi_+ | \nabla \psi_- \rangle|^2. \quad (5.13)$$

En utilisant l'expression explicite des états habillés donnée en (5.8), on arrive à

$$\mathcal{A}_-(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2} \nabla \phi (1 - \cos \theta), \quad \mathcal{V}_-(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{8M} [(\nabla \theta)^2 + \sin^2 \theta (\nabla \phi)^2]. \quad (5.14)$$

## 2 Le cas des ondes planes

Nous allons considérer dans cette section le cas le plus simple d'atomes à deux niveaux plongés dans une onde laser plane progressive. D'une certaine mesure, ce cas est trivial car le potentiel vecteur que nous allons induire est uniforme dans l'espace. Il ne s'agit donc pas à proprement parler d'un hamiltonien magnétique. Néanmoins, l'étude de ce cas sera instructive car elle nous permettra de discuter les principales échelles d'impulsion et d'énergie du problème, de comparer notre approximation adiabatique à un traitement exact et d'en déduire son domaine de validité. L'approche que nous allons développer nous sera également très utile quand nous nous intéresserons au couplage spin-orbite.

Dans le cas d'un couplage par onde plane, l'hamiltonien interne de chaque atome est la matrice  $2 \times 2$  donnée en (5.5) avec  $\Delta$  indépendant de  $\mathbf{r}$  et

$$\kappa(\mathbf{r}) = \kappa_0 e^{2i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad \text{avec} \quad 2\mathbf{k} = \mathbf{k}_a - \mathbf{k}_b, \quad (5.15)$$

de sorte que  $2\hbar\mathbf{k}$  désigne l'impulsion transférée à l'atome par les faisceaux laser, quand il subit une transition de  $|g_1\rangle$  vers  $|g_2\rangle$ . La connexion de Berry donnée en (5.14) est alors indépendante du point  $\mathbf{r}$  et vaut

$$\mathcal{A}_- = \hbar\mathbf{k}(1 - \cos\theta) \quad \text{avec} \quad \cos\theta = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + \kappa_0^2}}. \quad (5.16)$$

Le potentiel scalaire  $\mathcal{V}_-$  donné en (5.14) est lui aussi uniforme dans l'espace et égal à  $E_r \sin^2\theta$ , avec  $E_r = \hbar^2 k^2 / 2M$ .

## 2-1 Que peut-on mesurer ?

La connexion de Berry (potentiel vecteur) dépendant de la jauge, il n'est pas question de la « mesurer » dans l'absolu. Néanmoins, pour un choix de jauge donné, il est possible<sup>1</sup> d'avoir une manifestation expérimentale de sa présence dans une expérience de temps de vol [voir aussi Möller & Cooper (2010)]. Un moyen pour cela est de s'intéresser à l'état fondamental de l'hamiltonien et de déterminer sa vitesse. Pour expliciter ce point, nous allons comparer cet état fondamental en absence et en présence de couplage laser.

Prenons par exemple un désaccord  $\Delta > 0$  pour le couplage Raman et considérons d'abord un nuage d'atomes préparés dans l'état interne  $|g_2\rangle$  en absence de laser. L'angle de mélange vaut  $\theta = 0$  et le potentiel vecteur (5.16) est nul. L'état fondamental externe correspond à l'impulsion nulle  $\mathbf{p} = 0$ , ce qui donne pour l'état global (externe+interne) :

$$\Psi_0(\mathbf{r}) = |g_2\rangle. \quad (5.17)$$

Quand on branche les faisceaux laser, l'état fondamental de l'hamiltonien interne correspond à l'état habillé  $|\psi_-\rangle$  donné en (5.8) :

$$|\psi_-(\mathbf{r})\rangle = \cos(\theta/2)|g_2\rangle - e^{-2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sin(\theta/2)|g_1\rangle \quad (5.18)$$

et le potentiel vecteur prend la valeur non nulle  $\mathcal{A}_- = \hbar\mathbf{k}(1 - \cos\theta)$  [cf. (5.16)]. L'hamiltonien externe décrivant l'évolution de l'amplitude associée  $\phi_-(\mathbf{r})$  est

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \mathcal{A}_-)^2}{2m} - \frac{\hbar\Omega}{2} + \mathcal{V}_-. \quad (5.19)$$

1. On pourra vérifier que les expressions (5.21) et (5.22) sont inchangées si on change la phase des états habillés  $|\psi_\pm\rangle$ , ce qui correspond un changement de jauge dans notre problème.

L'état fondamental global (externe + interne) correspond donc à l'impulsion  $\mathbf{p} = \mathcal{A}_-$  et s'écrit

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}) &= e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} |\psi_-(\mathbf{r})\rangle = e^{i\mathcal{A}_-\cdot\mathbf{r}/\hbar} |\psi_-(\mathbf{r})\rangle \\ &= e^{i\mathcal{A}_-\cdot\mathbf{r}/\hbar} (\cos(\theta/2)|g_2\rangle - e^{-i2\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sin(\theta/2)|g_1\rangle). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Supposons que l'on coupe alors brutalement le laser et qu'on laisse les paquets d'ondes correspondant aux deux états internes  $|g_1\rangle$  et  $|g_2\rangle$  se propager. On va trouver deux classes de vitesses peuplées, séparées de la quantité  $2\hbar\mathbf{k}/M$  :

- Une classe de vitesses a pour poids  $\cos^2(\theta/2)$ , elle correspond à l'état  $|g_2\rangle$  et est centrée sur

$$\mathbf{v} = \frac{\mathcal{A}_-}{M} = \frac{\hbar\mathbf{k}}{M}(1 - \cos\theta). \quad (5.21)$$

- Une autre classe de vitesses a pour poids  $\sin^2(\theta/2)$ , elle correspondant à l'état  $|g_1\rangle$  et est centrée sur

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathcal{A}_- - 2\hbar\mathbf{k}}{M} = -\frac{\hbar\mathbf{k}}{M}(1 + \cos\theta). \quad (5.22)$$

Chacune de ces vitesses permet donc de remonter à la valeur de  $\mathcal{A}_-$  en présence de laser. En particulier le décalage en vitesse des atomes dans l'état  $|g_2\rangle$  entre la situation sans laser  $v = 0$  et la situation avec laser  $v = v_r(1 - \cos\theta)$  (cf. 5.21) peut atteindre la vitesse recul  $v_r = \hbar k/M$ . Le décalage maximum est obtenu quand  $\theta$  approche  $\pi/2$ , c'est-à-dire quand la fréquence de Rabi  $\kappa_0$  devient grande devant le désaccord  $\Delta$ .

## 2-2 Mise en évidence expérimentale

La première expérience ayant pour but affiché de mettre en évidence un potentiel vecteur géométrique pour un atome dans une onde plane lumineuse a été effectuée au NIST par Lin et al. (2009a). Puisqu'un potentiel vecteur uniforme peut toujours être créé ou éliminé par une transformation de jauge, on peut bien sûr débattre de l'antériorité de certaines autres expériences. Disons que l'expérience de Lin et al. (2009a) a été la première à poser en termes de champ de jauge le gain d'impulsion d'un atome une

fois qu'on l'a « habillé » par un laser. Par ailleurs, le schéma utilisé par Lin et al. (2009a) se prête bien à une généralisation à un potentiel vecteur non uniforme, générant une courbure de Berry (champ magnétique) non nulle.

Lin et al. (2009a) ont utilisé des atomes de rubidium  $^{87}\text{Rb}$  préparés dans leur niveau hyperfin fondamental  $F = 1$ . Les atomes sont placés dans un champ magnétique statique parallèle à l'axe  $z$ , axe que nous choisirons comme direction de quantification. Les états propres de l'hamiltonien interne atomique en absence de laser sont donc les trois sous-niveaux Zeeman  $|m_z = -1\rangle$ ,  $|m_z = 0\rangle$  et  $|m_z = +1\rangle$  avec pour énergies  $-\hbar\omega_Z$ ,  $0$ ,  $+\hbar\omega_Z$  (nous négligerons ici l'effet Zeeman du deuxième ordre).

Un couplage par effet Raman stimulé entre ces trois sous-niveaux est produit par une paire de faisceaux (notés  $a$  et  $b$ ) contre-propageant le long de l'axe  $x$  (figure 5.3ab). Le faisceau  $a$ , de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = k\mathbf{u}_x$ , est polarisé linéairement le long de l'axe  $z$ , ce qui donne une composante de moment cinétique nulle le long de cet axe (polarisation  $\pi$ ). Le faisceau  $b$ , de vecteur d'onde  $-\mathbf{k}$ , est polarisé linéairement le long de l'axe  $y$ , ce qui donne aux photons de ce faisceau une composante de moment cinétique  $\pm\hbar$  le long de l'axe de quantification  $z$  (polarisation  $\sigma$ ). On choisit les deux faisceaux avec des fréquences  $\omega_a$  et  $\omega_b$  telles que<sup>2</sup>

$$\Delta = (\omega_a - \omega_b) - \omega_Z, \quad |\Delta| \ll \omega_Z. \quad (5.25)$$

Bien qu'il s'agisse maintenant d'un système à 3 niveaux au lieu de 2, la méthode suivie précédemment s'applique. En passant dans le référentiel tournant associé à cette approximation résonnante, l'hamiltonien d'un atome en interaction avec le rayonnement peut s'écrire dans la base  $\{|m_z = -1\rangle, |m_z = 0\rangle, |m_z = +1\rangle\}$  :

$$H_{\text{interne}} = \hbar \begin{pmatrix} +\Delta & \kappa_0 e^{-2ikx}/\sqrt{2} & 0 \\ \kappa_0 e^{+2ikx}/\sqrt{2} & 0 & \kappa_0 e^{-2ikx}/\sqrt{2} \\ 0 & \kappa_0 e^{+2ikx}/\sqrt{2} & -\Delta \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

2. En pratique,  $\omega_Z/2\pi$  est de l'ordre de 3 MHz, alors que  $\Delta/2\pi$  est de l'ordre de la dizaine de kHz. De la sorte, seuls les processus

$$|m_z = -1, \mathbf{p} - 2\hbar k\mathbf{u}_x\rangle \leftrightarrow |m_z = 0, \mathbf{p}\rangle \leftrightarrow |m_z = +1, \mathbf{p} + 2\hbar k\mathbf{u}_x\rangle \quad (5.23)$$

sont quasi-résonnants ( $\Delta$  près), alors que les autres processus tels que

$$|m_z = -1, \mathbf{p} + 2\hbar k\mathbf{u}_x\rangle \leftrightarrow |m_z = 0, \mathbf{p}\rangle \leftrightarrow |m_z = +1, \mathbf{p} - 2\hbar k\mathbf{u}_x\rangle \quad (5.24)$$

sont non résonnants et peuvent être négligés.

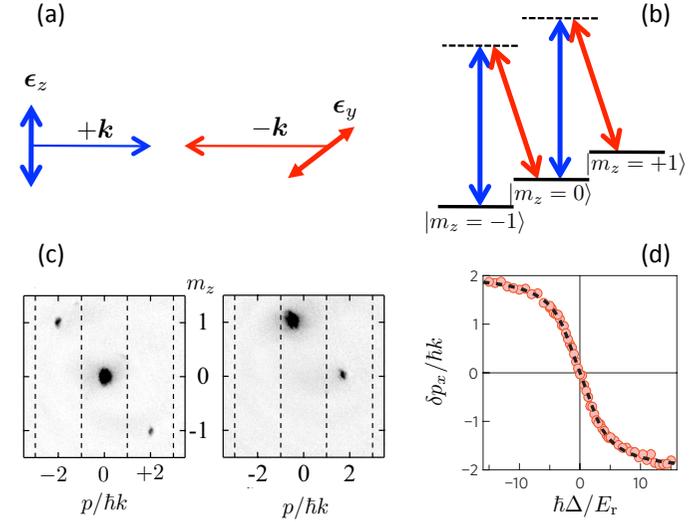


FIGURE 5.3. (a) Configuration laser utilisée par Lin et al. (2009a) (b) Schéma de niveaux avec les transitions laser quasi-résonnantes. (c) Résultats d'une expérience de temps de vol en présence d'un gradient de champ magnétique (Stern et Gerlach). (d) Décalage en impulsion  $\delta p_x$  de l'état fondamental révélant la présence d'un potentiel vecteur  $\mathcal{A}$  (figure extraite de Lin et al. (2011a)).

On détermine les trois états propres  $|\psi_{-1}\rangle$ ,  $|\psi_0\rangle$  et  $|\psi_{+1}\rangle$  associés aux trois énergies  $E_0 = 0$  et  $E_{\pm} = \pm\hbar(\Delta^2 + \kappa_0^2)^{1/2}$ . On trouve par exemple pour l'état habillé d'énergie la plus basse :

$$|\psi_{-1}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{\Delta^2 + \kappa^2}} \begin{pmatrix} (\sqrt{\Delta^2 + \kappa^2} - \Delta) e^{-4ikx} \\ -\sqrt{2} \kappa_0 e^{-2ikx} \\ (\sqrt{\Delta^2 + \kappa^2} + \Delta) \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

dont on déduit le potentiel vecteur

$$\mathcal{A}_{-} = i\hbar\langle\psi_{-1}|\nabla\psi_{-1}\rangle = 2\hbar\mathbf{k}(1 - \cos\theta) \quad \text{avec} \quad \cos\theta = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + \kappa^2}}. \quad (5.28)$$

Ce résultat est très proche de celui trouvé pour un atome à deux niveaux dans une onde plane, à un facteur 2 près [cf. eq.(5.16)]. Ce facteur 2 est dû

au fait qu'on est passé d'une situation où l'on considérait un spin effectif  $1/2$  (espace de Hilbert à deux dimensions) à une situation avec un spin 1.

L'expérience menée par Lin et al. (2009a) a consisté à préparer les atomes (en pratique un condensat de Bose-Einstein) dans l'état habillé  $|\psi_{-}\rangle$  pour un désaccord Raman  $\Delta = 0$ , puis à augmenter la valeur de ce désaccord jusqu'à une valeur donnée. Cette augmentation se fait lentement, de sorte que les atomes restent dans l'état fondamental de l'hamiltonien<sup>3</sup>

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \mathcal{A}_{-})^2}{2M} + \dots \quad (5.29)$$

Une mesure en temps de vol, dans laquelle on coupe brutalement les faisceaux Raman, révèle ensuite les composantes d'impulsion occupées par les atomes (figure 5.3c). Cette expansion balistique se fait en présence d'un gradient de champ magnétique, ce qui permet de mesurer simultanément la population des trois sous-niveaux Zeeman. On obtient en général trois populations non nulles, dont les poids sont obtenus à partir du développement (5.27) dans la base des sous-niveaux Zeeman. Chaque composante a une impulsion décalée d'une même quantité  $\delta p_x$  par rapport à la valeur trouvée pour  $\Delta = 0$ . Si les atomes sont dans l'état fondamental de (5.29), on s'attend à trouver  $\delta p_x = \mathcal{A}_{-}$ , ce qui est effectivement le cas expérimentalement (figure 5.3d).

### 2-3 Traitement exact pour l'onde plane

Dans le cas particulier d'une onde laser plane et progressive, on peut en fait mener un traitement quantique exact, ne nécessitant pas le recours à l'approximation adiabatique [voir aussi Lin et al. (2009a)]. Si on prend en compte de manière quantique le mouvement externe du centre de masse de l'atome, une base de l'espace de Hilbert total est donnée par  $\{|g_1, \mathbf{p}\rangle, |g_2, \mathbf{p}'\rangle\}$ . On peut regrouper cette infinité d'états sous forme de familles que l'interaction atome-laser laisse globalement invariante :

$$\mathcal{F}(\mathbf{p}) = \{|g_1, \mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}\rangle, |g_2, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle\}. \quad (5.30)$$

3. Pour que cette hypothèse soit valable, il faut briser l'invariance par translation, ce qui se fait en pratique en confinant le nuage dans un piège harmonique. Sinon, pour un atome isolé, l'impulsion commute à chaque instant avec l'hamiltonien et est donc une constante du mouvement.

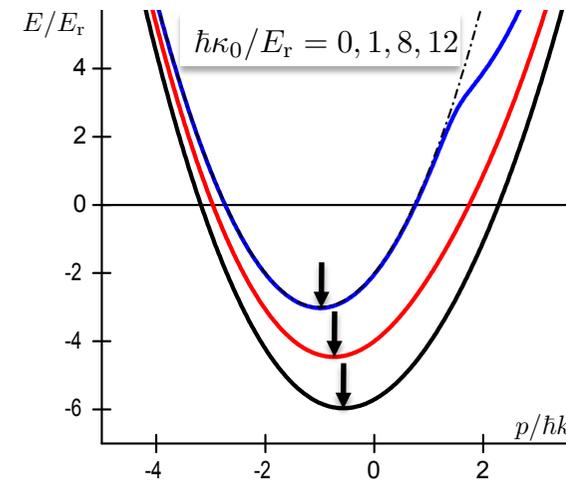


FIGURE 5.4. Niveau d'énergie fondamentale  $E_{-}(p)$  de l'hamiltonien  $\hat{H}(p)$  donné en (5.31) pour  $\hbar\Delta = 6 E_r$  et pour des valeurs croissantes de  $\kappa_0$ . La flèche signale le minimum de la courbe de dispersion, correspondant à l'impulsion  $p = \mathcal{A}_{-}$ , la connexion de Berry  $\mathcal{A}_{-}$  étant donnée en (5.35).

L'hamiltonien total (interne+centre de masse) restreint à la famille  $\mathcal{F}(\mathbf{p})$  prend la forme d'une matrice  $2 \times 2$  :

$$\hat{H}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} (\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k})^2/2M + \hbar\Delta/2 & \hbar\kappa_0/2 \\ \hbar\kappa_0/2 & (\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k})^2/2M - \hbar\Delta/2 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

que l'on peut diagonaliser pour toute valeur de  $\mathbf{p}$  (voir figure 5.4). Quand  $\kappa_0 = 0$ , les énergies propres  $E_{\pm}(p)$  sont les deux paraboles usuelles pour la relation de dispersion d'une particule libre. Quand  $\kappa_0$  est non nul, les deux valeurs propres de la matrice (5.31) deviennent :

$$E_{\pm}(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2M} + E_r \pm \frac{\hbar}{2} \left[ \kappa_0^2 + \left( \Delta - 2\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{M} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (5.32)$$

où on a introduit l'énergie de recul  $E_r = \hbar^2 k^2/2M$ .

Considérons par exemple la branche d'énergie la plus basse  $E_{-}(p)$  comme dans le paragraphe § 2-1 (figure 5.4). Le résultat (5.32) redonne

bien le spectre de l'hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \mathcal{A}_-)^2}{2M} - \frac{\hbar\Omega}{2} + \dots \quad (5.33)$$

en prenant la limite  $kp/M \ll \Omega = (\kappa_0^2 + \Delta^2)^{1/2}$  et en utilisant  $\cos \theta = \Delta/\Omega$  :

$$\begin{aligned} E_-(p) &\approx \frac{p^2}{2M} + E_r - \frac{\hbar\Omega}{2} \left[ 1 - \frac{4\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{M\Omega^2} \right]^{1/2} \\ &\approx \frac{p^2}{2M} + \frac{\hbar \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{2M} \cos \theta - \frac{\hbar\Omega}{2} + \dots \\ &\approx \frac{p^2}{2M} - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathcal{A}_-}{M} - \frac{\hbar\Omega}{2} + \dots \end{aligned} \quad (5.34)$$

On retrouve donc le résultat de l'approximation adiabatique à partir du traitement exact. Notons qu'on a pris ici le choix de jauge

$$\mathcal{A}_- = -\hbar \mathbf{k} \cos \theta, \quad (5.35)$$

qui diffère par le terme constant  $\hbar \mathbf{k}$  du résultat (5.16) obtenu avec l'écriture (5.18) de l'état habillé  $|\psi_-\rangle$ . Le choix de jauge fait ici est obtenu en écrivant l'état habillé  $|\psi_-\rangle$  sous la forme

$$|\psi_-\rangle = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \cos(\theta/2) |g_2\rangle - e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \sin(\theta/2) |g_1\rangle, \quad (5.36)$$

choix qui est en correspondance avec la définition de la famille  $\mathcal{F}(\mathbf{p})$  qui fait jouer des rôles symétriques à  $|g_1\rangle$  et  $|g_2\rangle$ .

Ce cas exactement soluble permet par ailleurs de tester la validité de l'approximation adiabatique ; rappelons que ce critère de validité est que la vitesse angulaire des états propres doit être petite devant les fréquences de Bohr du système. Dans le cas présent, cette fréquence de Bohr est donnée par la fréquence de Rabi généralisée  $\Omega$ . La vitesse angulaire des états propres s'obtient en étudiant comment le mouvement à vitesse  $v$  de l'atome modifie les états habillés. Or, ces états habillés varient à l'échelle de  $k^{-1} = \lambda/(2\pi)$ , en raison du coefficient  $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$  qui entre dans leur expression. La vitesse angulaire recherchée, calculée dans un point de vue semi-classique, est donc

$$\left| \langle \psi_- | \dot{\psi}_- \rangle \right| \sim kv \cos^2(\theta/2) \lesssim kv, \quad (5.37)$$

ce qui donne comme critère suffisant pour que l'approximation adiabatique soit satisfaite

$$k \bar{v} \ll \Omega \quad \text{ou encore} \quad \frac{kp}{M\Omega} \ll 1 \quad (5.38)$$

ce qui justifie le développement (5.34). Comme une échelle minimale de vitesse pour ce problème est donnée par la vitesse de recul  $\hbar k/M$ , le critère ci-dessus implique en particulier

$$\frac{\hbar k^2}{M} \ll \Omega \quad \text{ou encore} \quad E_r \ll \hbar\Omega. \quad (5.39)$$

### 3 La courbure de Berry $B$

Nous abordons maintenant le cas vraiment intéressant où non seulement le potentiel vecteur (connexion de Berry), mais aussi le champ magnétique (courbure de Berry) est non nul. Le paragraphe précédent, dans lequel nous avons décrit comment générer un potentiel vecteur uniforme, va nous servir de guide. Nous avons vu que pour un transfert d'impulsion entre atome et lumière se produisant dans la direction  $x$ , nous obtenons un potentiel vecteur aligné avec l'axe  $x$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{A} \mathbf{u}_x$  [cf. 5.16], dont l'amplitude  $\mathcal{A}$  dépend du rapport entre fréquence de Rabi et désaccord. L'hamiltonien est alors

$$\hat{H} = \frac{(\hat{p}_x - \mathcal{A})^2}{2M} + \frac{\hat{p}_y^2}{2M} + \dots \quad (5.40)$$

Pour obtenir un véritable hamiltonien magnétique, il faut que  $\mathcal{A}$  dépende de la position. Par exemple, un potentiel vecteur  $\mathcal{A} \propto y$  nous permettra de réaliser un hamiltonien correspondant à un champ magnétique en jauge de Landau.

#### 3-1 Le résultat général pour un atome à deux niveaux

Partant de l'expression générale

$$\mathcal{A} = i\hbar \langle \psi | \nabla \psi \rangle, \quad (5.41)$$

où  $|\psi\rangle$  est l'état habillé suivi adiabatiquement par l'atome, on vérifie facilement que l'expression de la courbure de Berry peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{B} \equiv \nabla \times \mathcal{A} = i\hbar \langle \nabla \psi | \times | \nabla \psi \rangle \quad (5.42)$$

Pour le cas de l'atome à deux niveaux abordé plus haut (§ 1-3), cette courbure de Berry s'écrit pour les deux niveaux habillés d'énergie  $\pm\hbar\Omega/2$

$$\mathcal{B}_{\pm} = \nabla \times \mathcal{A}_{\pm} = \pm \frac{\hbar}{2} \nabla(\cos \theta) \times \nabla \phi. \quad (5.43)$$

Pour avoir une courbure non nulle, il faut avoir à la fois :

- un gradient de la phase  $\phi$  du couplage laser (une onde purement stationnaire ne fera pas l'affaire),
- un gradient de l'angle de mélange  $\theta$  obtenu en prenant
  - soit une intensité laser qui varie dans l'espace,
  - soit un désaccord dépendant du point où se trouve l'atome, ce qui peut être obtenu par exemple en plaçant l'atome dans un champ magnétique extérieur.

Il est intéressant de remarquer que l'on retrouve ici deux ingrédients caractéristiques des forces que peut exercer un faisceau lumineux sur un atome « à deux niveaux ». Le gradient de phase de l'onde lumineuse est à l'origine de la force de pression de radiation, alors que le gradient d'intensité de l'onde lumineuse donne naissance à la force dipolaire. Pour avoir un champ magnétique artificiel non nul, il faut que ces deux ingrédients soient réunis, avec en plus la contrainte que les deux gradients ne soient pas colinéaires. Notons toutefois que le rapprochement avec les forces radiatives n'est pas complet. La force de pression de radiation n'existe qu'en présence un processus dissipatif additionnel, comme l'émission spontanée de photons. Au contraire, dans le cas du magnétisme artificiel qui nous intéresse ici, aucun processus dissipatif n'entre en jeu.

### 3-2 Onde plane + gradient de désaccord

Considérons un atome à deux niveaux  $|g_1\rangle$  et  $|g_2\rangle$ , avec un couplage Raman créé par deux ondes lumineuses planes induisant un transfert d'impulsion de  $2\hbar k$  le long de l'axe  $x$  :

$$\kappa(\mathbf{r}) = \kappa_0 e^{i2kx}, \quad (5.44)$$

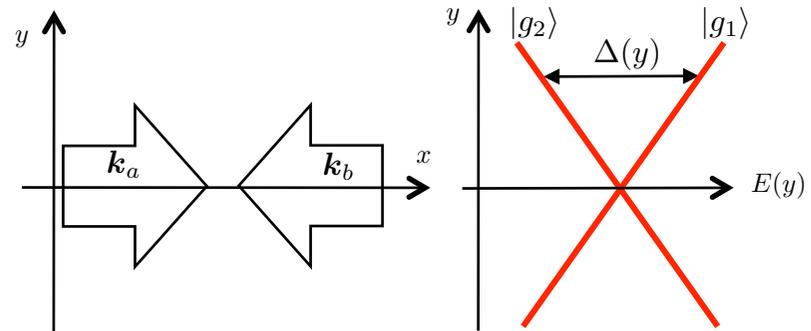


FIGURE 5.5. Configuration laser et spectre atomique conduisant à une courbure de Berry non nulle.

ce qui donne un gradient de phase  $\nabla \phi = 2k\mathbf{u}_x$ . Supposons que le désaccord entre l'atome et l'onde lumineuse varie linéairement avec la position le long de l'axe  $y$  :

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta' y \quad (5.45)$$

où  $\Delta'$  est une constante (figure 5.5). Comme indiqué plus haut, une telle variation peut être obtenue en utilisant l'effet Zeeman dans un gradient de champ magnétique (bien réel, lui !) ou alors un déplacement lumineux du niveau  $|g_1\rangle$  ou  $|g_2\rangle$  produit par un faisceau laser auxiliaire. Introduisons la longueur caractéristique du problème

$$\ell = \kappa_0 / \Delta' \quad (5.46)$$

qui est la distance à l'axe  $y$  pour laquelle le désaccord devient (en valeur absolue) égal à la fréquence de Rabi  $\kappa_0$ . Un calcul simple donne alors pour la courbure de Berry

$$\mathcal{B}(\mathbf{r}) = B_0 \mathcal{L}^{3/2}(y) \mathbf{u}_z \quad (5.47)$$

avec

$$B_0 = \frac{\hbar k}{\ell}, \quad \mathcal{L}(y) = \frac{1}{1 + y^2/\ell^2}. \quad (5.48)$$

Le champ magnétique effectif est donc invariant par translation le long de l'axe  $x$  et maximal sur cet axe. Il décroît de part et d'autre de cet axe et tend vers 0 comme  $|y|^{-3}$  quand  $y \rightarrow \infty$ .

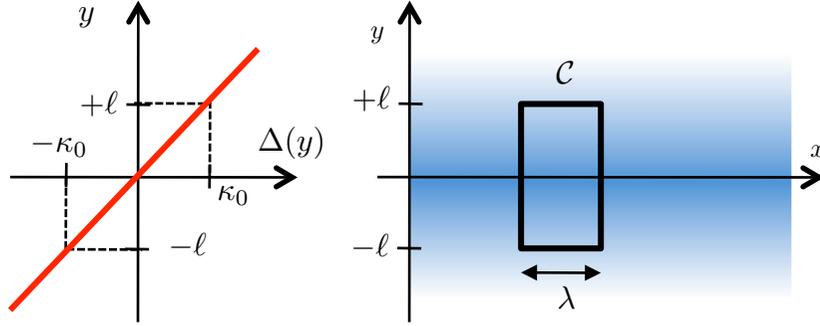


FIGURE 5.6. Représentation en fausses couleurs du module du champ magnétique généré par la configuration onde plane + gradient de désaccord. La phase de Aharonov-Bohm-Berry à travers le contour  $\mathcal{C}$  est d'ordre  $2\pi$ .

**Comment mesurer l'amplitude de ce champ magnétique ?** L'amplitude  $B_0$  donne l'ordre de grandeur du champ magnétique artificiel que nous pouvons créer par cette méthode. Elle est d'ordre  $\hbar$  (la constante de Planck) divisée par le carré d'une longueur, en l'occurrence  $\lambda\ell$ . Cette amplitude ne se mesure pas en Tesla ; en effet, il n'y a pas de charge électrique à mettre en face de  $B_0$ . La manière naturelle pour évaluer l'amplitude  $B_0$  est de se donner un circuit fermé  $\mathcal{C}$  et d'évaluer la taille que doit avoir ce circuit pour qu'une phase de type Aharonov-Bohm prenne une valeur significative ( $\sim \pi$ ). Nous savons que cette phase  $\gamma(\mathcal{C})$  est proportionnelle au flux de  $\mathcal{B}$  à travers une surface  $\mathcal{S}$  s'appuyant sur ce contour :

$$\frac{\gamma(\mathcal{C})}{2\pi} = \frac{1}{\hbar} \iint_{\mathcal{S}} \mathcal{B} \cdot \mathbf{u} \, d^2r, \quad (5.49)$$

et elle sera donc d'ordre  $2\pi$  pour le circuit d'aire  $2\lambda\ell$  représenté sur la figure 5.6. Nous verrons dans un chapitre ultérieur que le flux de  $\mathcal{B}$  exprimé en unité de  $\hbar$  donne également le nombre de vortex quantiques qui sont nucléés en régime stationnaire dans un superfluide en interaction, localisés à l'intérieur du circuit  $\mathcal{C}$ . Les grands champs magnétiques correspondront donc à des petites valeurs de  $\ell$ , c'est-à-dire des forts gradients de désaccord.

En règle générale, les valeurs maximales accessibles pour ces champs

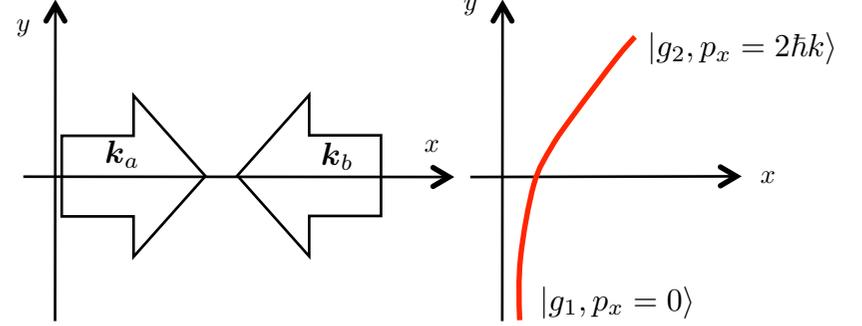


FIGURE 5.7. Déviation d'une trajectoire par la force de Lorentz due à la courbure de Berry.

artificiels correspondent au cas où  $\phi$  et  $\theta$  varient tous deux significativement à l'échelle de la longueur d'onde, ce qui conduit à un champ magnétique d'ordre  $\hbar k^2$ . Un autre critère pertinent est d'évaluer la pulsation cyclotron. Quand le champ magnétique artificiel  $B_0$  devient de l'ordre de  $\hbar k^2$ , on a

$$\hbar\omega_c = \frac{\hbar B_0}{M} \sim \frac{\hbar^2 k^2}{M} \sim E_r. \quad (5.50)$$

**Courbure de Berry et force de Lorentz.** Il est intéressant de retrouver sur cet exemple un concept classique du magnétisme orbital, la force de Lorentz. Prenons par exemple un atome se déplaçant le long de l'axe  $y$  à vitesse  $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{u}_y$  (donc de trajectoire  $y(t) = v_0 t$ ) en absence de champ magnétique artificiel (figure 5.7). En présence de ce champ, qui est dirigé selon  $z$ , la force de Lorentz va dévier la trajectoire de la particule dans le plan  $xy$ . Plus précisément, l'atome va acquérir une impulsion le long de l'axe  $x$  donnée par

$$\Delta p_x = \int_{-\infty}^{+\infty} F_x \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} v_0 B_z(t) \, dt. \quad (5.51)$$

Cette intégrale se calcule analytiquement pour la forme de  $B$  trouvée en (5.47), si on suppose que la déviation de la trajectoire est faible :

$$\begin{aligned}\Delta p_x &= v_0 B_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[1 + (y(t)/\ell)^2]^{3/2}} dt \\ &= B_0 \ell \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[1 + u^2]^{3/2}} du \\ &= 2B_0 \ell \\ &= 2\hbar k.\end{aligned}\tag{5.52}$$

L'explication de la déviation par la force de Lorentz est donc très simple dans ce cas : l'atome entre dans le faisceau laser préparé dans l'état habillé qui se raccorde à  $|g_1\rangle$  en  $y = -\infty$  ; il en ressort en étant passé adiabatiquement vers l'état  $|g_2\rangle$ , donc en ayant encaissé l'impulsion  $2\hbar k$  communiquée par la transition Raman.

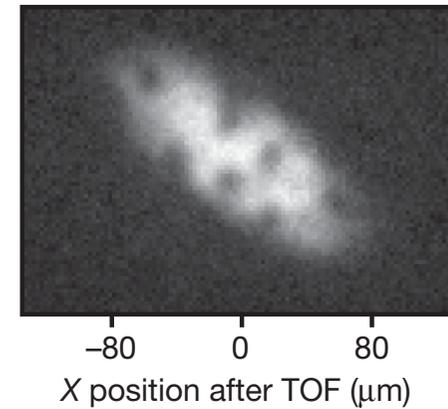
**Le (problématique) potentiel scalaire.** Le potentiel scalaire se calcule lui aussi simplement à partir des expressions générales données plus haut. En utilisant (5.14), on trouve :

$$\mathcal{V}(y) = \frac{E_r}{4} \left( \mathcal{L}(y) + \frac{1}{k^2 \ell^2} \mathcal{L}^2(y) \right).\tag{5.53}$$

Supposons que l'on cherche à atteindre des effets de type effet Hall quantique, avec les atomes accumulés dans le niveau de Landau fondamental. L'échelle d'énergie pertinente du problème est alors  $\hbar\omega_c$  qui, comme nous l'avons vu ci-dessus, est typiquement d'ordre  $E_r$ . Le potentiel scalaire a une amplitude du même ordre et son influence doit être prise en compte de manière précise. Un exemple d'étude détaillée est donné par Julia-Diaz et al. (2011); on y montre que les états fortement corrélés caractéristiques de l'effet Hall quantique peuvent être fortement affectés, voire détruits, par ce potentiel scalaire.

### 3-3 Mise en évidence expérimentale

Dans la lignée de leur première expérience ayant mis en évidence le potentiel vecteur associé à une transition Raman, le groupe du NIST a rendu



**FIGURE 5.8.** Observation de vortex par Lin et al. (2009b) dans une configuration impliquant une paire de faisceaux Raman qui transfèrent de l'impulsion selon une direction, et un gradient de la fréquence de résonance atomique selon une autre direction.

ce potentiel vecteur « non trivial », en ajoutant un gradient de champ magnétique comme indiqué ci-dessus. Ce gradient est de l'ordre de quelques gauss/cm, correspondant à  $\ell$  de quelques dizaines de longueur d'onde optique  $\lambda$  (Lin et al. 2009b). Ceci leur a permis d'observer la formation de vortex quantifiés qui sont, comme nous l'avons déjà indiqué dans le cas des rotations, la manifestation naturelle d'un magnétisme orbital pour un superfluide. Un exemple de résultat obtenu par Lin et al. (2009b) est donné en figure 5.8.

Les vortex observés par le groupe du NIST, s'ils constituent une preuve incontestable de la présence d'une courbure de Berry non nulle, ne présentent pas l'ordre spatial attendu pour un réseau d'Abrikosov. Lin et al. (2009b) attribuent cette absence d'ordre au chauffage lié aux processus d'émission spontanée. Rappelons que pour les atomes alcalins, ces processus sont difficiles à éviter : les transitions Raman nécessaires à l'apparition d'un champ de jauge n'ont une amplitude importante que si les lasers qui les induisent ne sont pas trop désaccordés par rapport à l'écart de structure fine de la raie de résonance, et ce faible désaccord entraîne une émission spontanée relativement importante.

## 4 Champs de jauge non abéliens

Nous abordons maintenant une extension de la notion de potentiel de jauge géométrique et cherchons dans quelles conditions on peut utiliser la notion de suivi adiabatique dans le couplage atome-lumière pour générer un hamiltonien à une particule du type

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathcal{A}}(\hat{\mathbf{r}}))^2}{2M} + \dots \quad (5.54)$$

où  $\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{r})$  n'est plus simplement un champ de vecteurs, mais un ensemble de trois matrices  $\hat{\mathcal{A}} = (\hat{\mathcal{A}}_x, \hat{\mathcal{A}}_y, \hat{\mathcal{A}}_z)$  agissant également dans l'espace de Hilbert interne de l'atome :

$$\hat{\mathcal{A}}_x(\mathbf{r}) = [\mathcal{A}_x^{(m,n)}(\mathbf{r})], \quad \hat{\mathcal{A}}_y(\mathbf{r}) = [\mathcal{A}_y^{(m,n)}(\mathbf{r})], \quad \hat{\mathcal{A}}_z(\mathbf{r}) = [\mathcal{A}_z^{(m,n)}(\mathbf{r})], \quad (5.55)$$

où les indices  $m, n$  repèrent une base de l'espace de Hilbert interne.

Le caractère non-abélien est lié au fait qu'en un point  $\mathbf{r}$  donné, deux composantes de cette matrice ne commutent généralement pas :

$$[\hat{\mathcal{A}}_x(\mathbf{r}), \hat{\mathcal{A}}_y(\mathbf{r})] \neq 0. \quad (5.56)$$

On comprend intuitivement que ce caractère non-abélien peut enrichir les phénomènes susceptibles d'apparaître dans une expérience de type Aharonov-Bohm par exemple. Pour le cas abélien, la présence d'un champ magnétique entraîne que la particule acquiert une phase géométrique quand elle parcourt une trajectoire fermée  $\mathcal{C}$ . Dans le cas non abélien, cette phase est remplacée par une matrice agissant dans l'espace interne : l'atome, même s'il parcourt la boucle  $\mathcal{C}$  à vitesse arbitrairement lente, ne se retrouvera pas dans le même état interne à la fin de cette boucle.

L'idée de générer des potentiels non abéliens de manière géométrique remonte à l'article de Wilczek & Zee (1984). Dans ce travail, les auteurs s'intéressent à une généralisation du théorème adiabatique au cas où l'hamiltonien du système possède un groupe d'états propres qui restent, au cours de l'évolution, dégénérés (ou quasi-dégénérés) et bien séparés des autres états. Cette analyse a été suivie d'applications dans de nombreux domaines allant de la physique moléculaire à la matière condensée (Bohm et al. 2003; Xiao et al. 2010) [voir également Goldman et al. (2013)].

### 4-1 La force de Lorentz dans le cas non-abélien

Pour bien discerner la classe de champs de jauge non-abéliens qu'il est intéressant de générer, nous allons revenir sur la force de Lorentz qui agit sur une particule en mouvement lorsque l'hamiltonien de cette particule s'écrit

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathcal{A}}(\hat{\mathbf{r}}))^2}{2M}, \quad (5.57)$$

et  $\hat{\mathcal{A}}$  est un opérateur agissant dans l'état interne de la particule. Nous nous plaçons pour cela en point de vue de Heisenberg et nous définissons l'opérateur *vitesse* comme la dérivée par rapport au temps de l'opérateur position :

$$\hat{v} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\mathbf{r}}] = \frac{\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathcal{A}}(\hat{\mathbf{r}})}{M}. \quad (5.58)$$

L'hamiltonien (5.57) peut donc s'écrire dans le cas bi-dimensionnel qui nous intéresse ici :

$$\hat{H} = \frac{M}{2} (\hat{v}_x^2 + \hat{v}_y^2). \quad (5.59)$$

Notons que l'opérateur vitesse agit ici à la fois sur les degrés de liberté externes de la particule, via  $\hat{\mathbf{p}}$ , et sur ses degrés de libertés internes, via la matrice  $\hat{\mathcal{A}}$ .

Nous définissons ensuite l'opérateur *force* agissant sur la particule comme le produit de la masse par la dérivée de l'opérateur vitesse :

$$\hat{\mathbf{F}} = M \frac{d\hat{v}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, M\hat{v}]. \quad (5.60)$$

Un calcul simple utilisant la forme (5.59) donne :

$$\hat{\mathbf{F}} = \frac{1}{2} (\hat{v} \times \hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{B}} \times \hat{v}) \quad (5.61)$$

où l'opérateur champ magnétique est défini par

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathcal{B}}_z \mathbf{u}_z, \quad \hat{\mathcal{B}}_z = \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_x}{\partial y} - \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_y}{\partial x} - \frac{i}{\hbar} [\mathcal{A}_x, \mathcal{A}_y]. \quad (5.62)$$

Ce résultat est une généralisation de la force de Lorentz ; dans le cas abélien, les composantes  $\mathcal{A}_x$  et  $\mathcal{A}_y$  commutent et le champ magnétique intervenant dans la force de Lorentz (5.61) est simplement le rotationnel du potentiel vecteur. Dans le cas non-abélien, une contribution supplémentaire au champ magnétique apparaît, proportionnelle au commutateur  $[\mathcal{A}_x, \mathcal{A}_y]$ .

Ce commutateur permet de générer des effets magnétiques intéressants, liés à une force de Lorentz non nulle, même quand le potentiel vecteur est uniforme. C'est précisément ce qui se produit dans le couplage spin-orbite que nous allons rencontrer plus loin. Nous aurons alors :

$$\hat{\mathcal{A}} = \eta \hat{S} \quad (5.63)$$

où  $\hat{S}$  est l'opérateur spin de la particule et  $\eta$  une constante. Le commutateur générique pour un opérateur moment cinétique  $[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar \hat{S}_z$  conduira à un opérateur champ magnétique uniforme

$$\hat{\mathcal{B}} = \eta^2 \hat{S}_z \mathbf{u}_z. \quad (5.64)$$

La particule ressentira un champ magnétique non nul et aligné selon l'axe  $z$ , dont l'amplitude  $\eta^2 m \hbar$  dépend du nombre quantique  $m$  donnant la projection de son spin sur l'axe  $z$ .

## 4-2 Émergence de potentiels non abéliens

Pour montrer comment un hamiltonien du type (5.54) peut apparaître, nous allons prendre une nouvelle fois une situation caractéristique de l'optique quantique, avec un atome à  $N + 1$  niveaux internes couplés par un champ lumineux. En tout point  $\mathbf{r}$  de l'espace, on suppose que l'on peut écrire l'hamiltonien décrivant la dynamique interne de l'atome sous la forme d'une matrice  $H_{\text{interne}}(\mathbf{r})$  indépendante du temps, de taille  $(N + 1) \times (N + 1)$ . Pour une position  $\mathbf{r}$  donnée, on peut diagonaliser la matrice  $H_{\text{interne}}(\mathbf{r})$  et obtenir  $N + 1$  états habillés indépendants, que nous noterons  $|\psi_n(\mathbf{r})\rangle$ , avec leur énergie  $E_n(\mathbf{r})$  ( $n = 1, \dots, N + 1$ ). Notre hypothèse de départ sera que parmi ces  $N + 1$  états habillés, un nombre  $q$  d'entre eux (les  $q$  premiers par exemple) forme un sous-espace (presque) dégénéré  $\mathcal{E}_q$  et que ces niveaux sont bien séparés des autres (figure 5.9).

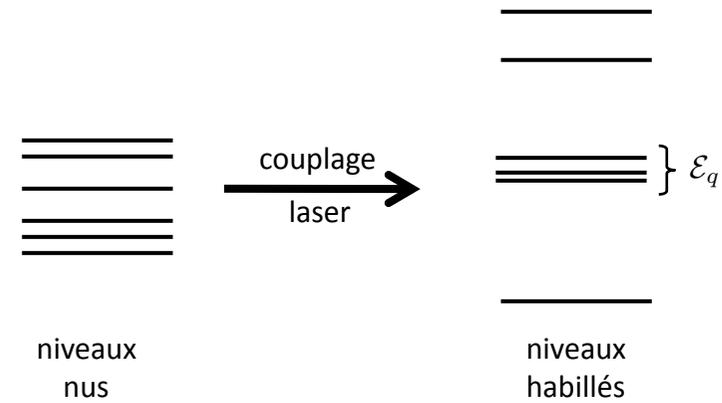


FIGURE 5.9. Quand un sous-espace  $\mathcal{E}_q$  dégénéré ou presque apparaît dans le spectre de l'atome habillé, la restriction de la dynamique à ce sous-espace peut générer des potentiels non abéliens.

L'état quantique de l'atome incluant à la fois les degrés de liberté internes et son centre de masse peut s'écrire

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N+1} \phi_n(\mathbf{r}) |\psi_n(\mathbf{r})\rangle \quad (5.65)$$

où chaque  $\phi_n$  est la fonction d'onde décrivant le mouvement du centre de masse pour l'atome dans l'état interne  $|\psi_n\rangle$ . Nous nous intéressons à la dynamique de l'atome quand il est initialement préparé dans le sous-espace  $\mathcal{E}_q$ . En négligeant les transitions en dehors de ce sous-espace, nous pouvons projeter l'équation de Schrödinger complète sur  $\mathcal{E}_q$  et arriver pour le vecteur colonne

$$\Phi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \phi_1(\mathbf{r}) \\ \vdots \\ \phi_q(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (5.66)$$

à une équation fermée qui prend la structure d'une équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[ \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathcal{A}}(\hat{\mathbf{r}}))^2}{2M} + \hat{E}(\hat{\mathbf{r}}) + \hat{\mathcal{V}}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \Phi, \quad (5.67)$$

où  $\hat{E}(\mathbf{r})$  est la matrice diagonale  $q \times q$  formée à partir des énergies propres  $E_n(\mathbf{r})$  ( $n = 1, \dots, q$ ).

Cette équation rappelle fortement l'équation de Schrödinger trouvée dans le cas scalaire Eq. (5.12). Néanmoins, la connexion de Berry  $\hat{\mathcal{A}}$  et le potentiel additionnel  $\hat{\mathcal{V}}$  sont désormais des matrices  $q \times q$  qui ont pour éléments

$$\hat{\mathcal{A}}^{(n,m)} = i\hbar \langle \psi_n(\mathbf{r}) | \nabla \psi_m(\mathbf{r}) \rangle, \quad (5.68)$$

$$\hat{\mathcal{V}}^{(n,m)} = \frac{1}{2M} \sum_{l=q+1}^{N+1} \hat{\mathcal{A}}^{(n,l)} \cdot \hat{\mathcal{A}}^{(l,m)}, \quad (5.69)$$

avec  $n, m \in (1, \dots, q)$ . Dans le cas où on se limite à un sous-espace  $\mathcal{E}_q$  à une dimension, on vérifie que l'on retrouve le résultat obtenu pour le cas abélien.

La courbure de Berry associée à  $\mathcal{A}$  est également une matrice  $q \times q$  :

$$\mathcal{B}_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ikl} F_{kl}, \quad F_{kl} = \partial_k \mathcal{A}_l - \partial_l \mathcal{A}_k - \frac{i}{\hbar} [\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_l]. \quad (5.70)$$

Comme mentionné plus haut, le champ magnétique artificiel  $\mathcal{B}$  peut être non nul même si le potentiel vecteur  $\mathcal{A}$  est uniforme dans l'espace.

### 4-3 Le schéma de niveau multipode

Une manière générique pour obtenir un sous-espace dégénéré dans une interaction atome-laser est de partir de la situation représentée sur la figure 5.10, où un unique état excité  $|e\rangle$  est couplé à  $N$  niveaux fondamentaux  $|g_j\rangle$  ( $j = 1, \dots, N$ ) [figure 5.10]. Chaque couplage  $|g_j\rangle \leftrightarrow |e\rangle$  est assuré par un faisceau laser de pulsation  $\omega_j$  et de fréquence de Rabi complexe  $\kappa_j$ . Ce schéma de niveau se produit par exemple quand on considère une transition atomique entre un niveau fondamental de moment cinétique  $J_g = 1$  et un niveau excité de moment cinétique  $J_e = 0$ , correspondant à  $N = 3$ . En considérant des transitions Raman entre états hyperfins, on peut également construire explicitement des schémas permettant de réaliser  $N = 4$  pour des atomes alcalins (Juzeliūnas et al. 2010).

Nous supposons ici que les couplages Raman entre les différents

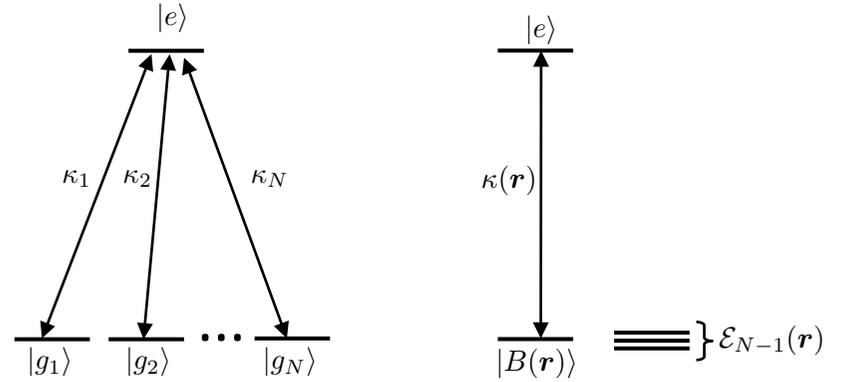


FIGURE 5.10. Configuration multipode : un état atomique excité  $|e\rangle$  est couplé à  $N$  états atomiques différents  $|g_j\rangle$  ( $j = 1, \dots, N$ ) par  $N$  champs lasers résonnants. On peut réécrire ce couplage en introduisant un état brillant  $|B(\mathbf{r})\rangle$  et un sous-espace noir, de dimension  $N - 1$ .

sous-niveaux sont tous résonants, c'est-à-dire que

$$E_{g_j} + \hbar\omega_j = E_e + \hbar\Delta, \quad (5.71)$$

où  $\Delta$  est indépendant de  $j$ . L'hamiltonien décrivant la dynamique interne de l'atome s'écrit alors à l'approximation du champ tournant :

$$H_{\text{interne}} = -\hbar\Delta |e\rangle\langle e| + \sum_{j=1}^N \left( \frac{\hbar\kappa_j(\mathbf{r})}{2} |e\rangle\langle g_j| + \text{h.c.} \right). \quad (5.72)$$

Cet hamiltonien peut être réécrit :

$$H_{\text{interne}} = -\hbar\Delta |e\rangle\langle e| + \frac{\hbar\kappa(\mathbf{r})}{2} (|e\rangle\langle B(\mathbf{r})| + |B(\mathbf{r})\rangle\langle e|), \quad (5.73)$$

où on a introduit l'état brillant

$$|B(\mathbf{r})\rangle = \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^N \kappa_j^* |g_j\rangle, \quad (5.74)$$

et défini la fréquence de Rabi totale  $\kappa$  (réelle positive) par

$$\kappa^2 = \sum_{j=1}^N |\kappa_j|^2. \quad (5.75)$$

La diagonalisation de  $H_{\text{interne}}(\mathbf{r})$  en un point  $\mathbf{r}$  donné permet de déterminer les états habillés  $|\psi_n\rangle$ . L'expression de ces états se calcule simplement :

- Le couplage entre l'état brillant et l'état excité donne naissance à deux états habillés, combinaisons linéaires de  $|e\rangle$  et  $|B\rangle$  avec des amplitudes qui sont fonctions de  $\Delta$  et  $\kappa$ , comme pour un atome à deux niveaux.
- Le sous-espace du niveau fondamental de dimension  $N - 1$  et orthogonal à  $|B(\mathbf{r})\rangle$  forme un sous-espace propre de  $H_{\text{interne}}$  pour la valeur propre 0.

On est donc bien dans la situation requise pour voir apparaître un champ de jauge non abélien. On a formé un sous-espace propre  $\mathcal{E}_q$  de dimension  $q = N - 1$ . Puisque l'état brillant dépend du point  $\mathbf{r}$ , le sous-espace orthogonal  $\mathcal{E}_q$  dépend lui aussi de la position du centre de masse de l'atome.

Nous n'allons pas développer ici le calcul général de la matrice  $\mathcal{A}$  donnant la connexion de Berry pour cette configuration multipode, mais nous allons l'illustrer sur un cas simple correspondant au couplage spin-orbite.

## 5 Le couplage spin-orbite

### 5-1 Comment générer un couplage spin-orbite 2D

Reprenons la configuration atomique de la section précédente et intéressons-nous plus particulièrement au cas d'un tripode, qui peut être réalisé expérimentalement en couplant un niveau fondamental de moment cinétique  $J_g = 1$  avec un état excité de moment cinétique  $J_e = 0$ . Supposons par ailleurs que les trois faisceaux lasers qui induisent les trois couplages  $|g_j\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ ,  $j = 1, 2, 3$  sont des ondes planes<sup>4</sup> se propageant dans le plan  $xy$  en formant des angles de  $120^\circ$ , de vecteur d'onde :

$$\mathbf{k}_1 = k\mathbf{u}_x, \quad \mathbf{k}_2 = -\frac{k}{2}(\mathbf{u}_x - \sqrt{3}\mathbf{u}_y), \quad \mathbf{k}_3 = -\frac{k}{2}(\mathbf{u}_x + \sqrt{3}\mathbf{u}_y). \quad (5.76)$$

4. On choisit les trois polarisations linéaires et orthogonales entre elles, formant un trièdre  $X, Y, Z$ . Les états  $|g_j\rangle$  sont alors les sous-niveaux  $|m_X = 0\rangle, |m_Y = 0\rangle, |m_Z = 0\rangle$  du niveau  $|g, J_g = 1\rangle$ .

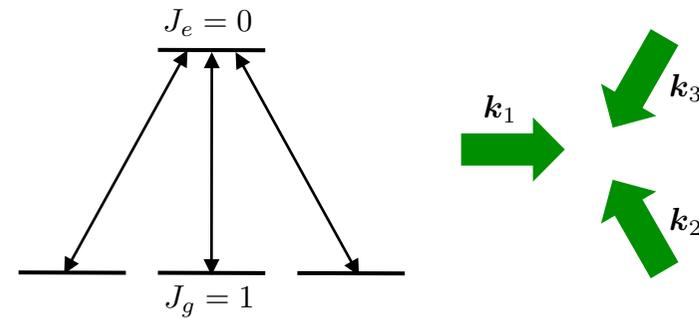


FIGURE 5.11. Couplage d'un état fondamental de moment cinétique 1 à un état excité de moment cinétique nul avec trois faisceaux lumineux (ondes planes) coplanaires. Ce couplage donne naissance à un effet spin-orbite à deux dimensions.

Les trois fréquences de Rabi complexes sont donc

$$\kappa_j = \frac{\kappa}{\sqrt{3}} e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}}. \quad (5.77)$$

L'état brillant s'écrit dans la base  $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle, |g_3\rangle\}$  :

$$|B(\mathbf{r})\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \\ e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \\ e^{-i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}} \end{pmatrix} \quad (5.78)$$

et on peut écrire explicitement une base orthogonale  $\{|N_1\rangle, |N_2\rangle\}$  (parmi une infinité d'autres) du sous-espace « noir », orthogonal à l'état brillant :

$$|N_1\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \\ e^{-i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + 2\pi/3)} \\ e^{-i(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r} + 4\pi/3)} \end{pmatrix}, \quad |N_2\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \\ e^{-i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - 2\pi/3)} \\ e^{-i(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r} - 4\pi/3)} \end{pmatrix}. \quad (5.79)$$

On peut ensuite calculer la matrice donnant la connexion de Berry, compo-

sante par composante. On trouve ainsi

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{A}}^{(1,1)} &= i\hbar\langle N_1 | \nabla N_1 \rangle \\
&= \frac{\hbar}{3} \left( e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}}, e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + 2\pi/3)}, e^{i(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r} + 4\pi/3)} \right) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{k}_1 e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \\ \mathbf{k}_2 e^{-i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + 2\pi/3)} \\ \mathbf{k}_3 e^{-i(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r} + 4\pi/3)} \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{5.80}$$

et

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{A}}^{(2,1)} &= i\hbar\langle N_2 | \nabla N_1 \rangle \\
&= \frac{\hbar}{3} \left( e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}}, e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - 2\pi/3)}, e^{i(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r} - 4\pi/3)} \right) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{k}_1 e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \\ \mathbf{k}_2 e^{-i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + 2\pi/3)} \\ \mathbf{k}_3 e^{-i(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r} + 4\pi/3)} \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 e^{i2\pi/3} + \mathbf{k}_3 e^{-i2\pi/3} \\
&= \frac{\hbar k}{2} (\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y).
\end{aligned} \tag{5.81}$$

De même, on trouve

$$\hat{\mathcal{A}}^{(1,2)} = \frac{\hbar k}{2} (\mathbf{u}_x - i\mathbf{u}_y), \quad \hat{\mathcal{A}}^{(2,2)} = 0, \tag{5.82}$$

de sorte que la matrice *connexion de Berry* prend une forme simple en utilisant les matrices de Pauli<sup>5</sup> :

$$\hat{\mathcal{A}} = \frac{\hbar k}{2} (\hat{\sigma}_x \mathbf{u}_x + \hat{\sigma}_y \mathbf{u}_y) = \frac{\hbar k}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}}. \tag{5.83}$$

On trouve donc ici une situation simple où la connexion de Berry est uniforme dans l'espace, mais correspond à une courbure non nulle. L'expression générale (5.70) donne dans ce cas particulier

$$\hat{\mathcal{B}} = \frac{\hbar k^2}{2} \hat{\sigma}_z \mathbf{u}_z, \tag{5.84}$$

c'est-à-dire un champ uniforme dans l'espace dont l'orientation dépend de l'état interne de l'atome.

5. Rappelons leur définition :

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 5-2 La physique du couplage spin-orbite

Le couplage spin-orbite est un phénomène bien connu en physique atomique et en physique de la matière condensée. Son origine est généralement relativiste : une particule chargée bouge à vitesse  $v$  dans une région où règne un champ électrique  $\mathcal{E}$ . Dans le référentiel de la particule, un champ magnétique motionnel  $\mathcal{B} \propto v\mathcal{E}$  apparaît. L'interaction entre ce champ magnétique et le moment magnétique de la particule, lui-même proportionnel au spin  $S$ , donne naissance au couplage spin-orbite.

En physique atomique, le champ électrique  $\mathcal{E}$  auquel est soumis un électron est le champ coulombien créé par le noyau et le couplage spin-orbite peut s'écrire après réarrangement comme  $\propto \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ , où  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  est le moment cinétique orbital de l'électron considéré. Dans les solides, le champ électrique apparaît par exemple à l'interface<sup>6</sup> entre deux matériaux, là où un gaz d'électron bi-dimensionnel est réalisé [couplage de Rashba, voir par exemple Galitski & Spielman (2013) pour plus de détails].

Les applications du couplage spin-orbite en physique des matériaux donnent lieu actuellement à des recherches intenses autour de la spintronique, tirant parti du contrôle que l'on peut avoir entre le spin et l'impulsion des électrons de conduction grâce à un champ électrique extérieur.

Sur le plan fondamental, le couplage spin-orbite peut également déboucher sur de nombreux effets spectaculaires parmi lesquels on peut citer :

- Le couplage spin-orbite peut donner naissance à des matériaux appelés *isolants topologiques*, qui sont des isolants dans le cœur, mais conducteurs en surface (Hasan & Kane 2010). Les propriétés de conduction en surface sont topologiquement robustes, d'une manière analogue (surtout pour le cas 2D) aux états de bord que nous avons rencontrés pour l'effet Hall quantique. Toutefois, à la différence de l'effet Hall, il n'y pas ici de champ magnétique extérieur qui brise l'invariance par renversement du temps. Par ailleurs, les conditions de température nécessaires pour atteindre ces états d'isolants topologiques sont moins contraignantes que celles requises pour l'effet Hall quantique (Hasan & Kane 2010).

6. Un champ électrique peut également apparaître dans le cœur du matériau si celui-ci n'a pas la symétrie d'inversion, le couplage spin-orbite étant alors de type Dresselhaus.

- Pour une particule de spin  $S$ , l'hamiltonien spin-orbite

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \eta\hat{\mathbf{S}})^2}{2M} \quad (5.85)$$

possède un niveau fondamental infiniment dégénéré. En effet, tous les états d'impulsion  $\mathbf{p}$  telle que  $|\mathbf{p}| = \eta S$  sont d'énergie nulle si on choisit correctement l'orientation du spin. Pour des bosons, cette dégénérescence infinie de l'état fondamental change radicalement la nature de la transition de Bose-Einstein (Zhou & Cui 2013).

- Considérons une interaction de contact (onde  $s$ ) pour un gaz de fermions ; on sait que si le gaz est polarisé, le résultat de cette interaction est nul du fait du principe de Pauli. En présence de couplage spin-orbite, une interaction effective apparaît même si le gaz est contraint à occuper une seule bande dans le diagramme d'énergie. Ceci permet d'envisager la formation de superfluides de type  $p_x + ip_y$  à partir d'interactions « traditionnelles » en onde  $s$  (Zhang et al. 2008).
- Pour un gaz de Fermi en contact avec un supraconducteur, le couplage spin-orbite peut donner naissance dans un échantillon à deux dimensions à des états à topologie non triviale, avec des modes de Majorana d'énergie nulle au sein d'un vortex (Sau et al. 2010). Ces modes de Majorana peuvent encore être présents à une dimension (Oreg et al. 2010; Lutchyn et al. 2010) et l'expérience récente de Mourik et al. (2012) a donné des signatures de leur existence, même si ces résultats restent encore débattus.

### 5-3 La version 1D du couplage spin-orbite

Le couplage spin-orbite à deux dimensions que nous venons d'envisager n'a pas encore été réalisé avec des atomes froids. En revanche, une version simplifiée uni-dimensionnelle, initialement identifiée par Higbie & Stamper-Kurn (2002), a été observée par plusieurs groupes, à commencer par le groupe du NIST pour un gaz de bosons (Lin et al. 2011b), puis par Cheuk et al. (2012) et Wang et al. (2012) pour des fermions.

Cette version 1D est en fait implicite dans le traitement exact que nous avons déjà présenté de l'interaction atome-lumière dans une onde

plane (§ 2). L'origine du couplage entre degrés de libertés externes (l'impulsion de l'atome) et internes (le niveau occupé) est simplement l'effet Doppler. Notons tout de suite une différence majeure avec le cas multi-dimensionnel : le couplage obtenu dans ce cas est abélien.

Nous pouvons reprendre telle quelle la forme de l'hamiltonien correspondant à la transition Raman  $|g_1\rangle \leftrightarrow |g_2\rangle$  considérée en début de chapitre

$$\hat{H}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} (\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k})^2/2M + \hbar\Delta/2 & \hbar\kappa_0/2 \\ \hbar\kappa_0/2 & (\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k})^2/2M - \hbar\Delta/2 \end{pmatrix}, \quad (5.86)$$

où l'écriture est faite dans la base des « familles » :

$$\mathcal{F}(\mathbf{p}) = \{|g_1, \mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}\rangle, |g_2, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle\}. \quad (5.87)$$

Cet hamiltonien peut se réécrire en termes des matrices de Pauli :

$$\hat{H}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2M} (\mathbf{p} - \hat{\mathcal{A}})^2 + \frac{\hbar\Delta}{2} \hat{\sigma}_z + \frac{\hbar\kappa_0}{2} \hat{\sigma}_x \quad \text{avec} \quad \hat{\mathcal{A}} = \hbar\mathbf{k}\hat{\sigma}_z. \quad (5.88)$$

ce qui correspond, presque trivialement, à la forme recherchée ! Il est clair que les trois composantes de  $\hat{\mathcal{A}}$  commutent entre elles. Comme  $\hat{\mathcal{A}}$  ne dépend par ailleurs pas de la position, la courbure de Berry  $\hat{\mathcal{B}}$  définie en (5.62) est nulle dans ce cas particulier.

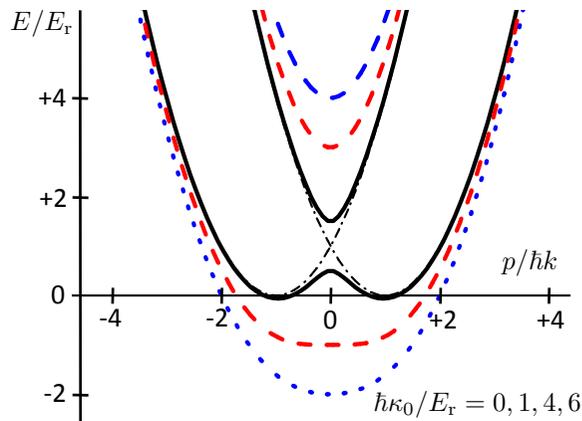
Malgré le passage à une dimension, certaines caractéristiques du couplage spin-orbite restent pertinentes. Par exemple, pour  $\Delta = 0$  et une amplitude assez faible du couplage Raman, on conserve la non-unicité de l'état fondamental de l'hamiltonien à une particule. On a tracé sur la figure 5.12 la variation du niveau d'énergie le plus bas de (5.86)

$$E_-(p) = \frac{p^2}{2M} + E_r - \frac{\hbar}{2} \left[ \kappa_0^2 + 4 \left( \frac{kp}{M} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (5.89)$$

On trouve que cette énergie est minimale en deux impulsions symétriques non nulles  $p$  et  $-p$  tant que la pulsation de Rabi vérifie

$$\hbar\kappa_0 < 4E_r. \quad (5.90)$$

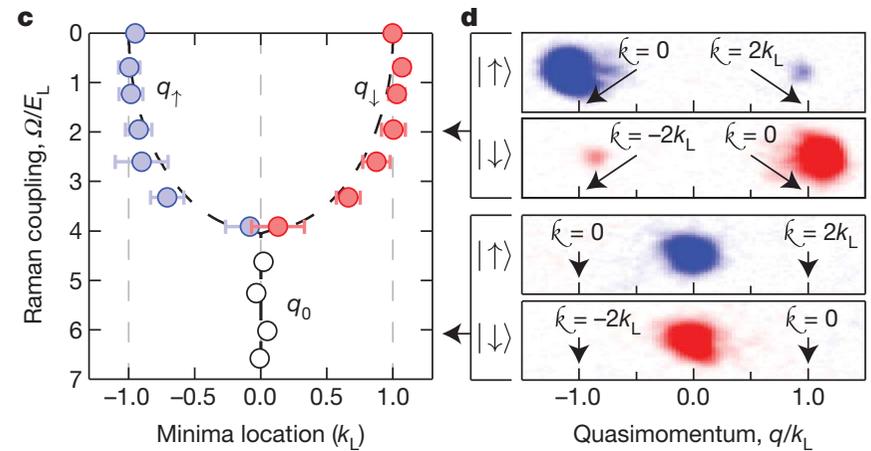
Au delà de cette valeur, le minimum de  $E_-(p)$  est situé en  $p = 0$  et on se retrouve approximativement dans la situation de l'approximation adiabatique étudiée en section 2. Le cas intéressant du point de vue spin-orbite,



**FIGURE 5.12.** Niveaux d'énergie de (5.86) pour un désaccord  $\Delta = 0$  et pour des valeurs croissantes de la fréquence de Rabi  $\kappa_0$ .

$\hbar\kappa_0 < 4E_T$ , est donc l'opposé du cas où l'approximation adiabatique est valide. Notons que chacun des minima est associé à un état interne prépondérant, l'état  $|g_2\rangle$  pour le minimum en  $p < 0$  et l'état  $|g_1\rangle$  pour le minimum en  $p > 0$ . On a reporté sur la figure 5.13 des résultats obtenus dans le groupe du NIST qui ont pleinement confirmé cette image simple pour des atomes de rubidium en isolant deux sous-niveaux Zeeman ( $m_F = 0$  et  $m_F = -1$ ) du niveau  $F = 1$ .

Au niveau de la particule unique, l'obtention et la description du couplage spin-orbite 1D est donc extrêmement simple et relève davantage d'une réinterprétation du diagramme habituel en énergie d'un atome habillé que d'une nouvelle configuration. En revanche, dès qu'on cherche à prendre en compte les interactions entre particules, le couplage spin-orbite enrichit considérablement le problème ; de multiples questions sont encore ouvertes sur les phases susceptibles d'apparaître aussi bien dans les gaz de Bose (voir par exemple Li et al. (2012)) que pour des fermions, avec la possibilité déjà mentionnée de générer des particules de Majorana aux extrémités d'une chaîne atomique dans un état supra-conducteur topologique (Oreg et al. 2010; Lutchyn et al. 2010).



**FIGURE 5.13.** Résultats tirés de Lin et al. (2011b) montrant l'évolution de la positions des minima de  $E_-(p)$  avec la pulsation de Rabi  $\kappa_0$ . La couleur code les populations relatives des deux sous-niveaux Zeeman en jeu  $m_F = 0$  et  $m_F = -1$ .

## Références

- Bohm, A., A. Mostafazadeh, H. Koizumi, Q. Niu & J. Zwanziger (2003), *Geometric Phases in Quantum Systems*, Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- Cheuk, Lawrence W., Ariel T. Sommer, Zoran Hadzibabic, Tarik Yefsah, Waseem S. Bakr & Martin W. Zwierlein (2012), « Spin-Injection Spectroscopy of a Spin-Orbit Coupled Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 109 (9), p. 095302.
- Galitski, Victor & Ian B. Spielman (2013), « Spin-orbit coupling in quantum gases », in *Nature* 494, p. 49.
- Goldman, N., G. Juzeliunas, P. Ohberg & I. B. Spielman (2013), « Light-induced gauge fields for ultracold atoms », arXiv :1308.6533.
- Hasan, M. Z. & C. L. Kane (2010), « *Colloquium* : Topological insulators », in *Rev. Mod. Phys.* 82 (4), pp. 3045–3067.
- Higbie, J. & D. M. Stamper-Kurn (2002), « Periodically Dressed Bose-Einstein Condensate : A Superfluid with an Anisotropic and Variable Critical Velocity », in *Phys. Rev. Lett.* 88 (9), p. 090401.

- Julia-Diaz, B., D. Dagnino, K. J. Günter, T. Graß, N. Barberán, M. Lewenstein & J. Dalibard (2011), « Strongly correlated states of a small cold-atom cloud from geometric gauge fields », in *Phys. Rev. A* 84 (5), p. 053605.
- Juzeliūnas, G., J. Ruseckas & J. Dalibard (2010), « Generalized Rashba spin-orbit coupling for cold atoms », in *Phys. Rev. A* 81, p. 053403.
- Li, Yun, Lev P. Pitaevskii & Sandro Stringari (2012), « Quantum Tricriticality and Phase Transitions in Spin-Orbit Coupled Bose-Einstein Condensates », in *Phys. Rev. Lett.* 108 (22), p. 225301.
- Lin, Y. J., R. L. Compton, A. R. Perry, W. D. Phillips, J. V. Porto & I. B. Spielman (2009a), « Bose-Einstein Condensate in a Uniform Light-Induced Vector Potential », in *Phys. Rev. Lett.* 102, p. 130401.
- Lin, Y.-J., R. L. Compton, K. Jiménez-García, J. V. Porto & I. B. Spielman (2009b), « Synthetic magnetic fields for ultracold neutral atoms », in *Nature* 462, pp. 628–632.
- Lin, Y.-J., R. L. Compton, K. Jiménez-García, W.D. Phillips, J.V. Porto & I.B. Spielman (2011a), « A synthetic electric force acting on neutral atoms », in *Nature Physics* 7, p. 531.
- Lin, Y.J., K. Jiménez-García & I. B. Spielman (2011b), « Spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensates », in *Nature* 471, p. 83.
- Lutchyn, Roman M., Jay D. Sau & S. Das Sarma (2010), « Majorana Fermions and a Topological Phase Transition in Semiconductor-Superconductor Heterostructures », in *Phys. Rev. Lett.* 105 (7), p. 077001.
- Möller, G. & N. R. Cooper (2010), « Condensed ground states of frustrated Bose-Hubbard models », in *Phys. Rev. A* 82 (6), p. 063625.
- Mourik, V., K. Zuo, S. M. Frolov, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers & L. P. Kouwenhoven (2012), « Signatures of Majorana Fermions in Hybrid Superconductor-Semiconductor Nanowire Devices », in *Science* 336, p. 1003.
- Oreg, Yuval, Gil Refael & Felix von Oppen (2010), « Helical Liquids and Majorana Bound States in Quantum Wires », in *Phys. Rev. Lett.* 105 (17), p. 177002.
- Sau, Jay D., Roman M. Lutchyn, Sumanta Tewari & S. Das Sarma (2010), « Generic New Platform for Topological Quantum Computation Using Semiconductor Heterostructures », in *Phys. Rev. Lett.* 104 (4), p. 040502.
- Wang, Pengjun, Zeng-Qiang Yu, Zhengkun Fu, Jiao Miao, Lianghai Huang, Shijie Chai, Hui Zhai & Jing Zhang (2012), « Spin-Orbit Coupled Degenerate Fermi Gases », in *Phys. Rev. Lett.* 109 (9), p. 095301.
- Wilczek, Frank & A. Zee (1984), « Appearance of Gauge Structure in Simple Dynamical Systems », in *Phys. Rev. Lett.* 52.24, pp. 2111–2114.
- Xiao, Di, Ming-Che Chang & Qian Niu (2010), « Berry phase effects on electronic properties », in *Rev. Mod. Phys.* 82 (3), pp. 1959–2007.
- Zhang, Chuanwei, Sumanta Tewari, Roman M. Lutchyn & S. Das Sarma (2008), «  $p_x + ip_y$  Superfluid from  $s$ -Wave Interactions of Fermionic Cold Atoms », in *Phys. Rev. Lett.* 101 (16), p. 160401.
- Zhou, Qi & Xiaoling Cui (2013), « Fate of a Bose-Einstein Condensate in the Presence of Spin-Orbit Coupling », in *Phys. Rev. Lett.* 110 (14), p. 140407.