

Chapitre 4

Magnétisme artificiel pour un atome isolé (partie 1)

Sommaire

1	Physique dans un référentiel tournant	2
1-1	Mise en rotation d'un système quantique	2
1-2	Transformation unitaire	3
1-3	Interprétation physique	4
1-4	Lien entre magnétisme orbital et rotation	5
2	Gaz en rotation	6
2-1	Anisotropie tournante	6
2-2	Peut-on atteindre la rotation critique $\Omega = \omega$?	7
2-3	Systèmes invariants par rotation	7
3	Le couplage d'un atome au rayonnement	9
3-1	Le modèle d'un atome à deux niveaux	9
3-2	Le modèle d'une transition Raman	11
3-3	Transitions Raman : alcalins vs. lanthanides	12
4	Potentiel vecteur et scalaire pour un atome	14
4-1	Expressions générales	15
4-2	Le résultat pour un atome à deux niveaux	15
4-3	Le potentiel scalaire dans un réseau « gris »	16
5	Références	18

À l'issue des cours précédents, nous disposons désormais de pistes pour simuler et caractériser le magnétisme orbital d'une assemblée de particules neutres. Nous souhaitons arriver à un hamiltonien du type :

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}))^2}{2M} + \dots = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2M} - \frac{\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}})}{M} + \dots \quad (4.1)$$

où le potentiel vecteur est « non trivial », c'est-à-dire que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \neq 0. \quad (4.2)$$

En particulier, le cas très important en pratique d'un champ magnétique uniforme peut être réalisé à partir de potentiels vecteurs qui s'écrivent en jauge symétrique ou en jauge de Landau :

$$\mathbf{A}^{(\text{sym})}(\mathbf{r}) = \frac{B}{2} (-y \mathbf{u}_x + x \mathbf{u}_y), \quad \mathbf{A}^{(\text{Landau})}(\mathbf{r}) = B x \mathbf{u}_y. \quad (4.3)$$

Pour structurer la présentation des principales approches qui ont été explorées récemment dans ce champ de recherche, on peut commencer par cerner plusieurs questions :

- *Quel confinement pour les atomes ?* Nous envisagerons deux réponses possibles à cette question. On peut tout d'abord s'intéresser à des atomes libres ou confinés dans un piège harmonique de raideur assez faible, pour lesquels on va retrouver quasiment à l'identique la notion de niveaux de Landau que nous avons déjà rencontrée. On peut à l'inverse considérer une ou plusieurs particules confinées dans un réseau

optique à l'approximation des liaisons fortes ; cette « discrétisation de l'espace » change quelque peu la nature du problème, qui se ramène alors à l'étude des propriétés topologiques des bandes d'énergie pertinentes.

- *Souhaite-t-on tirer parti de la structure interne des atomes ?* À la différence des électrons dans les solides, nos atomes possèdent une série d'états internes que l'on peut coupler entre eux par l'intermédiaire de faisceaux lumineux. Ce degré de liberté permet en particulier d'envisager la notion de suivi adiabatique d'un niveau habillé, avec la phase de Berry et le champ de jauge géométrique qui vient avec.
- *L'hamiltonien dépend-il explicitement du temps ?* Cette possibilité de moduler temporellement le potentiel agissant sur les atomes est également un degré de liberté fort utile. Ce potentiel peut avoir une fréquence du même ordre que la fréquence cyclotron ω_c que l'on cherche à faire apparaître, c'est ce que nous allons rencontrer avec la mise en rotation d'un système. Cette fréquence de modulation peut également être beaucoup grande que ω_c , le champ de jauge apparaissant alors comme un terme séculaire résultant d'un micro-mouvement bien choisi. Nous en verrons des exemples pour des atomes confinés dans un réseau optique.

Il n'existe pas (à notre connaissance) de critère universel permettant de privilégier une approche plutôt que l'autre. L'utilisation de plusieurs états internes est par exemple un outil de grande flexibilité, mais ouvre la question de possibles collisions inélastiques entre atomes, qui ne sont pas un problème si les atomes sont tous confinés dans l'état interne d'énergie minimale. Nous allons donc comparer, au fur et à mesure de notre progression, les avantages et les inconvénients liés à chacune de ces méthodes. Dans ce chapitre, nous allons donc nous concentrer sur des atomes libres ou confinés dans un piège harmonique isotrope, de pulsation ω . Nous allons passer en revue deux méthodes permettant d'aboutir à l'hamiltonien modèle (4.1), la première fondée sur la mise en rotation du système et la seconde sur l'utilisation explicite de plusieurs états internes atomiques. On pourra consulter l'article de revue récent de Goldman et al. (2013) pour approfondir les notions développées dans ce chapitre [voir aussi l'article de Dalibard et al. (2011) pour une revue plus succincte].

1 Physique dans un référentiel tournant

Partant d'un fluide composé de particules neutres de masse M , une des méthodes les plus simples sur le plan conceptuel pour simuler un magnétisme orbital consiste à le « faire tourner ». On considère une assemblée de particules neutres, et on s'arrange pour que leur environnement (le piège qui les confine) tourne autour de l'axe z avec une vitesse angulaire Ω : l'hamiltonien décrivant les forces extérieures agissant sur les atomes est donc modulé dans le temps avec cette pulsation Ω . On peut alors montrer que la dynamique des particules du fluide est équivalente à celle de particules de charge q plongées dans un champ magnétique tel que

$$q\mathbf{B} = 2M\boldsymbol{\Omega}, \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{u}_z. \quad (4.4)$$

Cette similarité entre magnétisme orbital et rotation se comprend aisément quand on compare la force de Lorentz responsable du magnétisme et la force de Coriolis qui apparaît dans un référentiel en rotation :

$$\mathbf{F}_{\text{Lorentz}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{F}_{\text{Coriolis}} = 2M\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}. \quad (4.5)$$

Le but de ce paragraphe est de formaliser cette similarité dans le cadre du formalisme hamiltonien de la physique quantique, et de dégager la signification physique des observables pertinentes.

1-1 Mise en rotation d'un système quantique

Considérons pour commencer une particule unique, de masse M , soumise dans un référentiel galiléen \mathcal{R} au potentiel indépendant du temps $V(\mathbf{r})$. Le mouvement quantique de la particule est décrit par l'équation de Schrödinger avec un hamiltonien indépendant du temps :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad \text{avec} \quad \hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2M} + V(\hat{\mathbf{r}}). \quad (4.6)$$

Le potentiel $V(\hat{\mathbf{r}})$ décrit l'ensemble des facteurs extérieurs agissant sur la particule : potentiel de confinement dans le cas d'une expérience avec un gaz piégé, miroirs et séparateurs de faisceaux dans le cas d'une expérience d'interférométrie. En particulier, pour l'étude d'un gaz de particules et tant

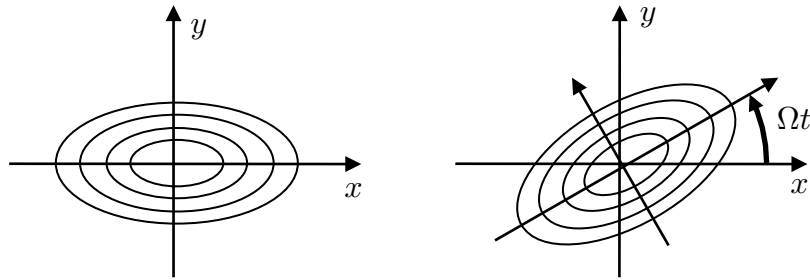


FIGURE 4.1. Gauche : courbes équipotentielles pour $V(\mathbf{r})$. Droite : courbes équipotentielles à un instant donné pour $W(\mathbf{r}, t)$, correspondant à une rotation à vitesse angulaire Ω du potentiel initial $V(\mathbf{r})$.

que l'hamiltonien est indépendant du temps, la procédure habituelle de la physique statistique s'applique : recherche des états propres, écriture d'un état d'équilibre thermique, calcul des différentes grandeurs à l'équilibre, etc.

Supposons maintenant que l'on fasse tourner le potentiel autour de l'axe z à vitesse angulaire constante Ω . L'hamiltonien à une particule dans le référentiel \mathcal{R} dépend alors explicitement du temps :

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2M} + W(\hat{\mathbf{r}}, t) \quad (4.7)$$

avec (cf. figure 4.1) :

$$W(x, y, z, t) = V[x \cos(\Omega t) + y \sin(\Omega t), -x \sin(\Omega t) + y \cos(\Omega t), z]. \quad (4.8)$$

Dès lors que l'hamiltonien dépend explicitement du temps, il n'est plus possible d'appliquer la démarche habituelle pour construire un état d'équilibre thermique. Néanmoins, on peut dans ce cas se ramener à un problème indépendant du temps via une transformation unitaire : les méthodes usuelles de la thermodynamique quantique redeviendront alors utilisables.

Remarque. Nous supposons ici que le potentiel $V(\mathbf{r})$ n'est pas invariant par rotation autour de l'axe z . Sinon, le potentiel $W(\mathbf{r}, t)$ ne dépend effec-

tivement pas du temps et le référentiel \mathcal{R} est un référentiel légitime pour appliquer les concepts de la physique statistique.

1-2 Transformation unitaire

Rappelons tout d'abord les principes généraux d'une transformation unitaire¹. Partons d'un système décrit par un hamiltonien $H(t)$ dépendant du temps, et un état évoluant selon l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle. \quad (4.9)$$

On se donne un opérateur $\hat{U}(t)$ et on construit les états transformés

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi(t)\rangle. \quad (4.10)$$

L'équation d'évolution de $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ est donnée elle aussi par une équation de Schrödinger, avec l'hamiltonien $\hat{\tilde{H}}$:

$$i\hbar \frac{\partial |\tilde{\psi}(t)\rangle}{\partial t} = \hat{\tilde{H}} |\tilde{\psi}(t)\rangle, \quad \hat{\tilde{H}} = \hat{U} \hat{H} \hat{U}^\dagger + i\hbar \frac{d\hat{U}}{dt} \hat{U}^\dagger. \quad (4.11)$$

Notre but dans ce qui suit est de proposer un opérateur \hat{U} tel que le transformé $\hat{\tilde{H}}$ de l'hamiltonien donné en (4.7-4.8) soit indépendant du temps.

Posons

$$\hat{U}(t) = \exp\left(i\Omega t \hat{L}_z / \hbar\right) \quad \text{avec} \quad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (4.12)$$

où la dernière expression fait référence aux coordonnées cylindriques (r, φ, z) avec $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. L'action de \hat{U} sur une fonction

1. Nous adoptons dans tout ce paragraphe un point de vue quantique, bien adapté aux applications que nous envisagerons ensuite. Notons toutefois qu'un traitement classique à partir du formalisme lagrangien donne des résultats formellement identiques. Pour un tel traitement, on pourra consulter par exemple le livre de Landau & Lifshitz (1982), § 39, ainsi que le cours au Collège de France de C. Cohen-Tannoudji de l'année 2001-02 (diapos 80-85).

$\psi(r, \varphi, z)$ est

$$\begin{aligned}\hat{U}\psi(r, \varphi, z) &= \exp\left(\Omega t \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \psi(r, \varphi, z) \\ &= \psi(r, \varphi, z) + \Omega t \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{1}{2}(\Omega t)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \dots \\ &= \psi(r, \varphi + \Omega t, z).\end{aligned}\quad (4.13)$$

Examinons comment les différents opérateurs intervenant dans (4.7) se transforment sous l'action de \hat{U} . Commençons par \hat{x} et \hat{y} pour lesquels on trouve :

$$\hat{U}\hat{x}\hat{U}^\dagger = \hat{x} \cos(\Omega t) - \hat{y} \sin(\Omega t), \quad \hat{U}\hat{y}\hat{U}^\dagger = \hat{x} \sin(\Omega t) + \hat{y} \cos(\Omega t). \quad (4.14)$$

Pour démontrer ces identités, considérons par exemple l'action de $\hat{U}\hat{x}\hat{U}^\dagger$ sur une fonction $\psi(r, \varphi, z)$:

$$\begin{aligned}(\hat{U}\hat{x}\hat{U}^\dagger) \psi(r, \varphi, z) &= (\hat{U}\hat{x}) \psi(r, \varphi - \Omega t, z) \\ &= \hat{U} [r \cos \varphi \psi(r, \varphi - \Omega t, z)] \\ &= r \cos(\varphi + \Omega t) \psi(r, \varphi, z) \\ &= (x \cos(\Omega t) - y \sin(\Omega t)) \psi(r, \varphi, z).\end{aligned}\quad (4.15)$$

Le résultat (4.14) peut être inversé pour donner

$$\hat{U} (\hat{x} \cos(\Omega t) + \hat{y} \sin(\Omega t)) \hat{U}^\dagger = \hat{x}, \quad \hat{U} (-\hat{x} \sin(\Omega t) + \hat{y} \cos(\Omega t)) \hat{U}^\dagger = \hat{y}, \quad (4.16)$$

et donc

$$\begin{aligned}\hat{U}W(\hat{r}, t)\hat{U}^\dagger &= \hat{U}V[\hat{x} \cos(\Omega t) + \hat{y} \sin(\Omega t)t, -\hat{x} \sin(\Omega t) + \hat{y} \cos(\Omega t), \hat{z}]\hat{U}^\dagger \\ &= V(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})\end{aligned}\quad (4.17)$$

qui est indépendant du temps.

Considérons maintenant le terme d'énergie cinétique $\hat{p}^2/2m$ de (4.7). En utilisant l'opérateur laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\hat{p}^2}{2M} = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta = -\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi^2}\right), \quad (4.18)$$

on voit que cet opérateur commute avec $\hat{L}_z = -i\hbar\partial_\varphi$, ce qui est logique puisque ce terme d'énergie cinétique est invariant par rotation.

Le dernier terme à calculer pour obtenir l'expression de \hat{H} est

$$i\hbar\frac{d\hat{U}}{dt}\hat{U}^\dagger = i\hbar\left(\frac{i\Omega\hat{L}_z}{\hbar}\hat{U}\right)\hat{U}^\dagger = -\Omega\hat{L}_z, \quad (4.19)$$

lui aussi indépendant du temps.

Au final, on obtient pour \hat{H} l'expression suivante

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + V(\hat{r}) - \Omega\hat{L}_z, \quad (4.20)$$

qui est bien indépendante du temps : on va pouvoir utiliser cet hamiltonien comme base d'une étude de thermodynamique à l'équilibre.

1-3 Interprétation physique

La transformation unitaire décrite au paragraphe précédent correspond au changement de repère bien connu, faisant passer du référentiel galiléen \mathcal{R} au référentiel tournant à la vitesse angulaire Ω autour de l'axe z , noté \mathcal{R}' .

Pour montrer cette correspondance, partons d'une base \mathbf{u}_j ($j = x, y, z$) liée au repère \mathcal{R} . Introduisons la base \mathbf{u}'_j liée à \mathcal{R}' (cf. figure 4.2) :

$$\mathbf{u}'_x = \cos(\Omega t)\mathbf{u}_x + \sin(\Omega t)\mathbf{u}_y, \quad \mathbf{u}'_y = -\sin(\Omega t)\mathbf{u}_x + \cos(\Omega t)\mathbf{u}_y, \quad \mathbf{u}'_z = \mathbf{u}_z. \quad (4.21)$$

Un point M de coordonnées (x, y, z) dans la base \mathbf{u}_j a pour coordonnées :

$$x' = \cos(\Omega t)x + \sin(\Omega t)y, \quad y' = -\sin(\Omega t)x + \cos(\Omega t)y, \quad z' = z \quad (4.22)$$

dans la base \mathbf{u}'_j , ce qui assure que

$$x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z = x'\mathbf{u}'_x + y'\mathbf{u}'_y + z'\mathbf{u}'_z. \quad (4.23)$$

La comparaison de (4.22) avec le résultat obtenu en (4.16)

$$\hat{U} (\hat{x} \cos(\Omega t) + \hat{y} \sin(\Omega t)) \hat{U}^\dagger = \hat{x}$$

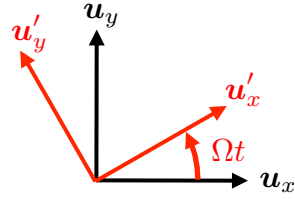


FIGURE 4.2. Base fixe $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)$ du référentiel galiléen \mathcal{R} et base tournante $\mathbf{u}'_x, \mathbf{u}'_y$ liée au référentiel en rotation \mathcal{R}' .

conduit alors à l'interprétation suivante : l'opérateur \hat{x} dans la « nouvelle représentation », c'est-à-dire celle obtenue après transformation unitaire, correspond à l'opérateur $\hat{x} \cos(\Omega t) + \hat{y} \sin(\Omega t)$ dans l'ancienne représentation. Or, d'après (4.22), cet opérateur n'est autre que l'opérateur position associé à la coordonnée x' dans la base \mathbf{u}'_j du référentiel tournant.

L'action de \hat{U} correspond donc bien à un changement de référentiel, les nouveaux opérateurs position correspondant à la quantité physique « position dans la base \mathbf{u}'_j liée au référentiel \mathcal{R}' ».

La présence du terme $-\Omega \hat{L}_z$ vient, comme pour l'hamiltonien magnétique, modifier la relation usuelle entre vitesse et impulsion. On peut définir l'opérateur vitesse à partir de l'hamiltonien (4.20) en se plaçant en point de vue de Heisenberg :

$$\hat{v} = \frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{r}] \quad (4.24)$$

ce qui conduit à

$$\hat{v}_x = \frac{\hat{p}_x}{M} + \Omega \hat{y}, \quad \hat{v}_y = \frac{\hat{p}_y}{M} - \Omega \hat{x}, \quad \hat{v}_z = \frac{\hat{p}_z}{M}. \quad (4.25)$$

En d'autres termes, dans la nouvelle représentation, l'impulsion \hat{p} et la quantité de mouvement $M\hat{v}$ sont reliées par la relation

$$\hat{p} = M\hat{v} + M\Omega \times \hat{r}. \quad (4.26)$$

Pour interpréter ce résultat, revenons un instant à la cinématique classique. Une particule de coordonnées (x, y, z) dans la base \mathbf{u}_j liée à \mathcal{R} a pour vitesse dans ce référentiel

$$\mathbf{v}_{\mathcal{R}} = \dot{x}\mathbf{u}_x + \dot{y}\mathbf{u}_y + \dot{z}\mathbf{u}_z. \quad (4.27)$$

Dans la base \mathbf{u}'_j liée au référentiel \mathcal{R}' , les coordonnées de la particule sont (x', y', z') et sa vitesse vaut :

$$\mathbf{v}_{\mathcal{R}'} = \dot{x}'\mathbf{u}'_x + \dot{y}'\mathbf{u}'_y + \dot{z}'\mathbf{u}'_z. \quad (4.28)$$

Le lien entre $\mathbf{v}_{\mathcal{R}}$ et $\mathbf{v}_{\mathcal{R}'}$ se fait en prenant en compte la rotation des \mathbf{u}'_j par rapport aux \mathbf{u}_j :

$$\frac{d\mathbf{u}'_j}{dt} = \Omega \times \mathbf{u}'_j \quad (4.29)$$

dont on déduit

$$x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z = x'\mathbf{u}'_x + y'\mathbf{u}'_y + z'\mathbf{u}'_z \Rightarrow \mathbf{v}_{\mathcal{R}} = \mathbf{v}_{\mathcal{R}'} + \Omega \times \mathbf{r}'. \quad (4.30)$$

Cette loi de composition des vitesses permet d'interpréter la relation (4.26). Dans (4.26), l'opérateur \hat{v} est associé à la quantité physique *vitesse dans le référentiel tournant* puisque c'est la dérivée de l'opérateur *position dans le référentiel tournant*. On déduit de (4.30) que l'opérateur impulsion \hat{p} dans la nouvelle représentation est associé à la quantité physique *masse \times vitesse dans le référentiel galiléen \mathcal{R}* .

Pour terminer, examinons l'opérateur « composante du moment cinétique selon z ». Il est clair que \hat{L}_z commute avec \hat{U} , soit

$$\hat{U} \hat{L}_z \hat{U}^\dagger = \hat{L}_z. \quad (4.31)$$

L'opérateur \hat{L}_z correspond donc toujours au moment cinétique dans le référentiel galiléen \mathcal{R} .

1-4 Lien entre magnétisme orbital et rotation

Nous disposons désormais de tous les éléments pour montrer l'équivalence entre magnétisme orbital et rotation. Considérons l'hamiltonien d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z$ et faisons le choix de la jauge symétrique :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{B}{2}(-y\mathbf{u}_x + x\mathbf{u}_y) \quad (4.32)$$

ce qui donne (cf. chapitre 2) :

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}))^2}{2M} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{1}{8}M\omega_c^2 r^2 - \frac{\omega_c}{2}\hat{L}_z. \quad (4.33)$$

avec $\omega_c = qB/M$. L'hamiltonien dans le référentiel tournant (4.20) possède une structure identique à cet hamiltonien magnétique pourvu que l'on prenne

$$\Omega = \omega_c/2 \quad (4.34)$$

et qu'on choisisse le potentiel extérieur $V(r)$ tel que

$$V(r) = \frac{1}{8}M\omega_c^2 r^2 = \frac{1}{2}M\Omega^2 r^2. \quad (4.35)$$

Ce choix signifie que la force de rappel associée à $V(r)$ compense exactement la force centrifuge.

Même si on ne prend pas le potentiel $V(r)$ exactement opposé au potentiel centrifuge, on peut toujours écrire l'hamiltonien dans le référentiel tournant (4.20) comme

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}))^2}{2M} + V(r) + V_{\text{centrif.}}(r) \quad (4.36)$$

avec

$$q\mathbf{A} = M\Omega(-y\mathbf{u}_x + x\mathbf{u}_y), \quad V_{\text{centrif.}}(r) = -\frac{1}{2}M\Omega^2 r^2 \quad (4.37)$$

ce qui veut dire que l'on simule ainsi le mouvement d'une particule chargée plongée dans un champ magnétique uniforme associé à la fréquence cyclotron $\omega_c = 2\Omega$, et soumise en plus au potentiel total $V + V_{\text{centrif.}}$.

2 Gaz en rotation

2-1 Anisotropie tournante

Pour mettre un gaz d'atomes froids en rotation, une méthode simple consiste à partir d'un piège isotrope dans le plan xy , correspondant au potentiel statique

$$V_0(r) = \frac{1}{2}M\omega^2(x^2 + y^2) \quad (4.38)$$

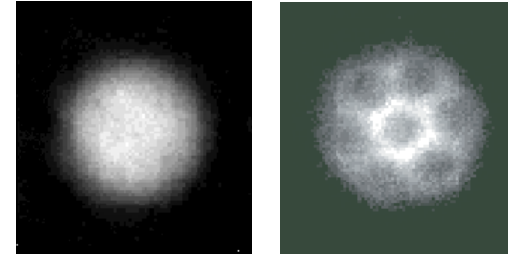


FIGURE 4.3. Gauche : condensat de Bose-Einstein d'atomes de rubidium confinés dans un piège isotrope dans le plan xy . Droite : Réseau de vortex obtenu en ajoutant une anisotropie tournante (Eqs. 4.38-4.39) avec $\epsilon \approx 0.1$. Figure extraite de Madison et al. (2000).

et à ajouter une légère anisotropie tournant à la fréquence angulaire Ω :

$$\begin{aligned} \delta V(x, y, t) &= \frac{\epsilon}{2}M\omega^2 [y'(t)^2 - x'(t)^2] \\ &= \frac{\epsilon}{2}M\omega^2 [(-\sin(\Omega t)x + \cos(\Omega t)y)^2 - (\cos(\Omega t)x + \sin(\Omega t)y)^2] \\ &= \frac{\epsilon}{2}M\omega^2 [\cos(2\Omega t)(y^2 - x^2) - 2\sin(2\Omega t)xy] \end{aligned} \quad (4.39)$$

où le paramètre ϵ caractérise l'amplitude de l'anisotropie. Dans le référentiel tournant, on obtient un potentiel statique légèrement anisotrope :

$$V(x, y) = V_0(x, y) + \delta V(x, y) = \frac{1}{2}M\omega^2 ((1 - \epsilon)x^2 + (1 + \epsilon)y^2) \quad (4.40)$$

En pratique, ce potentiel tournant peut être créé par un faisceau laser elliptique ou par un gradient de champ magnétique dépendant du temps. Nous montrons en figure 4.3 un résultat obtenu avec un gaz de rubidium mis en rotation par un agitateur laser. La présence d'un réseau régulier de vortex est la signature incontestable de cette mise en rotation, comme nous aurons l'occasion de l'expliciter dans un prochain chapitre.

2-2 Peut-on atteindre la rotation critique $\Omega = \omega$?

Nous avons expliqué à la fin du paragraphe précédent que le cas idéal d'une particule libre plongée dans un champ magnétique uniforme était atteint quand le potentiel de confinement $V(r)$ compensait exactement le potentiel centrifuge. C'est dans ce cas, et dans ce cas seulement, que le spectre à une particule de l'hamiltonien est constitué de niveaux de Landau dégénérés, cette dégénérescence étant un ingrédient important de l'obtention d'états fortement corrélés en présence d'interactions.

La présence de l'anisotrope ϵ va venir empêcher d'atteindre ce régime. Plus précisément, on peut montrer que la zone de rotation

$$\Omega/\omega \in [1 - \epsilon, 1 + \epsilon] \quad (4.41)$$

correspond à une instabilité dynamique pour le mouvement des particules (Rosenbusch et al. 2002). Ce résultat s'obtient assez simplement en dynamique newtonienne en écrivant les équations du mouvement dans le référentiel tournant, en prenant en compte force de Coriolis et force centrifuge, ainsi que la force liée au potentiel $V_0 + \delta V$:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\Omega\dot{y} + [\omega^2(1 - \epsilon) - \Omega^2]x &= 0, \\ \ddot{y} + 2\Omega\dot{x} + [\omega^2(1 + \epsilon) - \Omega^2]y &= 0. \end{aligned}$$

La recherche des valeurs propres de ce système conduit au résultat annoncé. Par exemple, si on choisit exactement $\Omega = \omega$, on trouve que la quantité $x + y$ diverge comme $\exp(\epsilon\omega t/2)$. Un exemple de cette divergence est montrée sur la figure 4.4.

Cette instabilité vient donc empêcher de prendre la fréquence angulaire de rotation Ω aussi prêt qu'on le souhaiterait de la pulsation ω du piège : on est limité à $\Omega \lesssim \omega(1 - \epsilon)$. Cela ne serait pas bien grave si ϵ pouvait être lui-même arbitrairement petit. Mais un piège réel n'est jamais parfaitement isotrope et il est donc caractérisé par une anisotropie statique non nulle $\epsilon_{\text{stat.}}$. Pour que le passage dans le référentiel tournant soit pertinent, il faut que l'anisotropie tournante ϵ soit grande devant cette anisotropie statique, ce qui impose en pratique de prendre des paramètres ϵ de quelques pour cents. Nous verrons dans un cours prochain que cette contrainte nous laisse relativement éloignés de la physique de l'effet Hall quantique.

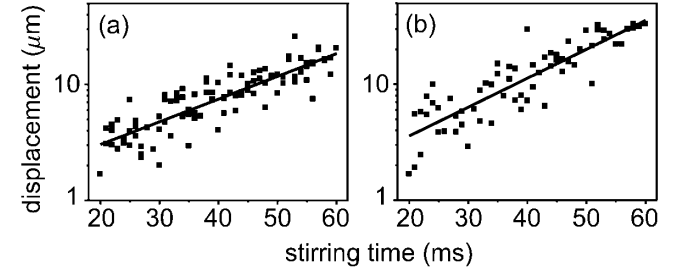


FIGURE 4.4. Instabilité dynamique d'un nuage d'atomes froids (non condensé à gauche, condensat quasi-pur à droite) pour une fréquence de rotation égale à la fréquence de piégeage $\Omega = \omega$. On observe une croissance exponentielle de l'écart entre le centre du piège et le centre de gravité du nuage. Le paramètre d'anisotropie ϵ vaut 0.09 pour cette expérience menée avec des atomes de rubidium ^{87}Rb ($\omega/(2\pi) = 180$ Hz). Figure extraite de l'article de Rosenbusch et al. (2002).

2-3 Systèmes invariants par rotation

Il existe une alternative intéressante au passage dans le référentiel tournant pour générer le terme en $-\Omega\hat{L}_z$, réinterprété ensuite comme un terme en $-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}})$. Cette alternative consiste à injecter un moment cinétique total moyen non nul $\langle L_z \rangle$ dans un gaz confiné dans un piège approximativement invariant par rotation. On laisse ensuite le gaz atteindre un état thermodynamique stationnaire, compte tenu de ce moment cinétique qui est une quantité conservée.

L'approche standard pour la recherche de cet état stationnaire est la technique des multiplicateurs de Lagrange, décrite par exemple dans le livre de Diu et al. (1989), complément II.E (on pourra consulter aussi l'ouvrage de Landau & Lifchitz (1984), § 26 et § 34). Supposons que l'on s'intéresse à l'état à température nulle, c'est-à-dire l'état fondamental compte tenu de la contrainte sur le moment cinétique. On introduit un paramètre de Lagrange Ω pour rendre compte de cette contrainte et on cherche l'état Ψ qui minimise la valeur moyenne de l'énergie

$$E(\Omega, \Psi) = \langle \Psi | \hat{H}_\Omega | \Psi \rangle \quad \text{avec} \quad \hat{H}_\Omega = \hat{H} - \Omega \hat{L}_z. \quad (4.42)$$

La valeur de Ω est ensuite déterminée de manière à assurer que la moyenne

de \hat{L}_z soit bien celle qu'on a injectée. On est donc amené à travailler avec le même hamiltonien que celui obtenu par passage dans le référentiel tournant, même si l'interprétation physique de Ω est différente : dans un cas, il s'agit de la fréquence angulaire de rotation imposée de l'extérieur ; dans l'autre, c'est un paramètre intrinsèque du système qui s'ajuste pour rendre compte du moment cinétique injecté initialement.

Remarque. Nous avons supposé ici que l'hamiltonien \hat{H} est invariant par rotation et commute avec \hat{L}_z . Si le système considéré est suffisamment petit pour qu'une diagonalisation exacte de \hat{H} soit possible, le passage via \hat{H}_Ω n'est pas nécessaire : on peut simplement chercher une base propre commune à \hat{H} et \hat{L}_z , puis ne considérer que les états propres qui sont dans le secteur correspondant au moment cinétique injecté. En revanche, si on doit avoir recours à des approximations de type champ moyen, c'est bien à partir de la fonctionnelle $E(\Omega, \Psi)$ qu'il faut travailler.

Comment injecter du moment cinétique ? Une fois identifiée cette approche alternative à la rotation forcée, cette question se pose naturellement. Parmi les méthodes qui ont été proposées, nous en présenterons ici deux.

- La première est la méthode d'évaporation sélective, mise en place par Eric Cornell et son groupe (Schweikhard et al. 2004). L'idée est de mettre dans un premier temps le nuage en rotation par la méthode « classique » avec un agitateur tournant. Ensuite, on débranche cet agitateur et le nuage se retrouve confiné dans un piège avec une très bonne symétrie de rotation autour de l'axe z : le groupe de Boulder estime que l'anisotropie résiduelle de leur piège est inférieure à 0.1%. On procède alors à une évaporation sélective, en enlevant des atomes qui se trouvent au voisinage de l'axe z , et qui portent donc moins de moment cinétique que la moyenne. Cette évaporation a pour effet d'augmenter le moment cinétique moyen par atome restant dans le piège (figure 4.5). Le paramètre de Lagrange Ω , qui représente ici la fréquence de rotation effective, peut atteindre dans ces expériences 0.993ω , ce qui constitue un record pour un piège purement harmonique. La fonction d'onde macroscopique peuple de manière significative des états de moment cinétique allant jusqu'à $120\hbar$.

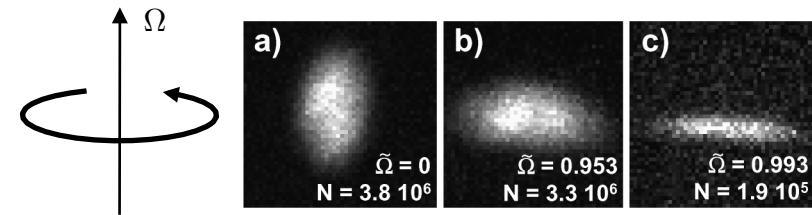


FIGURE 4.5. Mise en rotation d'un nuage par évaporation sélective. Les photos sont prises selon un axe perpendiculaire à l'axe de rotation z . En enlevant des atomes avec un moment cinétique inférieur à la moyenne, on augmente la vitesse de rotation du nuage restant dans le piège. La figure a correspond à un gaz au repos, la figure b à un gaz après évaporation radiofréquence, la figure c après une combinaison d'évaporation radiofréquence et lumineuse (un faisceau lumineux se propageant selon l'axe z éjecte les atomes situés au voisinage de cet axe). La quantité $\tilde{\Omega}$ désigne Ω/ω . Pour la fréquence de rotation très rapide obtenue en (c), la force centrifuge déforme considérablement le nuage, qui est alors complètement aplati dans le plan xy . Cette figure est extraite de l'article de Schweikhard et al. (2004).

- La seconde méthode consiste à transférer du moment angulaire à partir de faisceaux lumineux. On utilise pour cela une transition Raman induite par des faisceaux lumineux de type Laguerre–Gauss. Dans l'expérience de Moulder et al. (2012), les atomes sont initialement confinés dans un piège annulaire dans un état interne $|a\rangle$ (en l'occurrence l'état Zeeman $|F = 1, m = 1\rangle$ du ^{87}Rb). Une transition *absorption – émission stimulée* fait passer les atomes de l'état $|a\rangle$ vers un autre état interne $|b\rangle$ (ici $|F = 1, m = 0\rangle$). Un des faisceaux porte un moment cinétique angulaire pouvant aller jusqu'à $10\hbar$ alors que l'autre est un faisceau gaussien de moment cinétique orbital nul. Lors de la transition Raman, chaque atome gagne donc un moment cinétique allant lui aussi jusqu'à $10\hbar$. On réalise ainsi un courant permanent en circulation dans un anneau (figure 4.6).

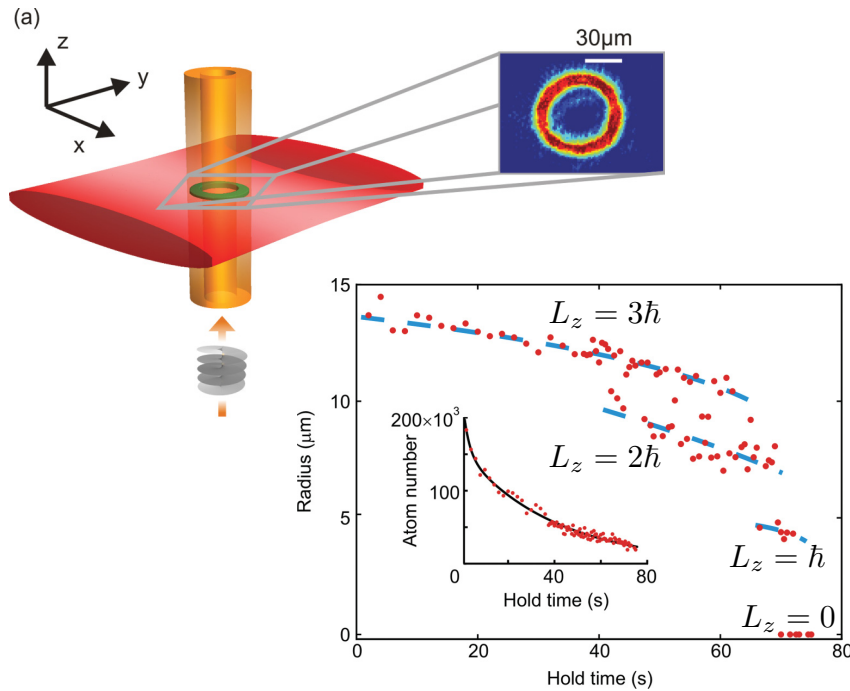


FIGURE 4.6. Courant permanent dans un piège annulaire, réalisé à partir de faisceaux laser dans un mode de Laguerre–Gauss. On transfère un moment cinétique déterminé aux atomes par une transition Raman stimulée, ce moment cinétique pouvait atteindre la dizaine de \hbar par atome. Une fois créé, ce courant permanent a une longue durée de vie. Le graphe montre qu'un moment cinétique initial de $3\hbar$ /atome peut subsister pendant une minute environ. On mesure ce courant à partir de la taille du trou central dans le nuage dans une expérience de temps de vol. Ces figures sont extraites de Moulder et al. (2012) (groupe de Z. Hadzibabic à Cambridge). Des expériences similaires sont menées dans le groupe de G. Campbell au NIST.

3 Le couplage d'un atome au rayonnement

Nous avons vu lors du chapitre consacré à la phase de Berry comment l'utilisation d'une structure interne des particules, accompagnée d'un suivi adiabatique d'un état interne dépendant de l'espace, pouvait conduire à une phase géométrique et un champ de jauge non nuls. Nous avons déjà indiqué que le cas d'un atome éclairé par un faisceau lumineux cohérent permettait en principe de mettre cette stratégie en œuvre, en exploitant l'existence de plusieurs états internes atomiques couplés entre eux par le rayonnement et l'émergence d'états habillés dépendant de la position.

Pour bien comprendre les possibilités ouvertes par cette approche ainsi que ses limitations, nous allons commencer par passer en revue les principaux éléments qui permettent de décrire le couplage atome–lumière et la manière dont il peut être mis en œuvre pour différentes espèces atomiques. Nous examinerons ensuite, dans ce chapitre et dans celui qui suivra, la mise en pratique de ce suivi adiabatique.

3-1 Le modèle d'un atome à deux niveaux

Nous considérons dans ce qui suit un atome éclairé par un faisceau lumineux monochromatique de pulsation ω . Nous assimilons l'atome à un système à deux niveaux, notés $|g\rangle$ et $|e\rangle$, séparés par l'énergie $\hbar\omega_0$ (figure 4.7), dont l'hamiltonien en absence de lumière s'écrit :

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2} (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|). \quad (4.43)$$

Nous supposons que la fréquence du faisceau lumineux est choisie relativement proche de la résonance atomique :

$$|\Delta| \ll \omega_0, \omega \quad \text{avec} \quad \Delta = \omega - \omega_0. \quad (4.44)$$

L'hamiltonien décrivant la dynamique interne de l'atome est la somme de \hat{H}_0 et du couplage atome-laser $\hat{V}_{AL}(t)$:

$$\hat{H}_{interne}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}_{AL}(t). \quad (4.45)$$

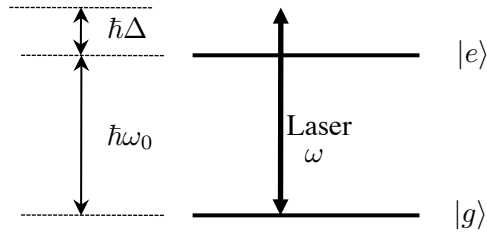


FIGURE 4.7. Modélisation d'un atome par un système à deux niveaux.

La forme de ce couplage peut être simplifiée grâce à l'approximation du champ tournant² pour s'écrire (Cohen-Tannoudji et al. 1989):

$$\hat{V}_{\text{AL}}(t) = \frac{\hbar\kappa}{2} e^{-i\omega t} |e\rangle\langle g| + \frac{\hbar\kappa^*}{2} e^{i\omega t} |g\rangle\langle e|. \quad (4.46)$$

où la *fréquence de Rabi* complexe κ caractérise la force du couplage atome-lumière, que nous supposons ici de nature dipolaire électrique. En particulier, le terme $(\hbar\kappa/2) e^{-i\omega t} |e\rangle\langle g|$ décrit le passage de $|g\rangle$ à $|e\rangle$ par *absorption* d'un photon dans l'onde lumineuse incidente, et le terme $(\hbar\kappa^*/2) e^{i\omega t} |g\rangle\langle e|$ décrit le passage de $|e\rangle$ à $|g\rangle$ par *émission stimulée* d'un photon dans cette onde.

Le passage *dans le référentiel tournant* vis à vis des variables internes permet de se ramener à l'hamiltonien indépendant du temps³:

$$\hat{H}_{\text{interne}} = \hat{H}_0 + \hat{V}_{\text{AL}} \quad (4.49)$$

avec

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar\Delta}{2} (|g\rangle\langle g| - |e\rangle\langle e|), \quad \hat{V}_{\text{AL}} = \frac{\hbar\kappa}{2} |e\rangle\langle g| + \frac{\hbar\kappa^*}{2} |g\rangle\langle e|. \quad (4.50)$$

2. Cette approximation consiste à négliger les termes qui auraient une contribution en $e^{\pm i(\omega+\omega_0)t}$ pour ne garder que les termes en $e^{\pm i(\omega-\omega_0)t}$ (cf. cours 2012-13).

3. Ce passage se fait via la transformation unitaire associée à l'opérateur

$$\hat{U}(t) = \exp[i(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|)\omega t/2] \quad (4.47)$$

et l'hamiltonien transformé (ici indépendant du temps) est obtenu via :

$$\hat{H} = \hat{U}(t)\hat{H}(t)\hat{U}^\dagger(t) + i\hbar\frac{d\hat{U}(t)}{dt}\hat{U}^\dagger(t). \quad (4.48)$$

soit, sous forme matricielle dans la base $\{|g\rangle, |e\rangle\}$:

$$\hat{H}_{\text{interne}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \kappa^* \\ \kappa & -\Delta \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

C'est cet hamiltonien \hat{H}_{interne} que nous utiliserons dans la suite, en omettant le signe \sim pour simplifier l'écriture quand il n'y aura pas d'ambiguïté. Les caractéristiques en intensité et en phase du faisceau lumineux sont contenues dans l'expression de la fréquence de Rabi complexe κ . En particulier, lorsqu'on étudiera le mouvement du centre de masse de l'atome, κ sera une fonction de la position de ce centre de masse et notée $\kappa(\mathbf{r})$. Par exemple, pour un atome éclairé par une onde plane progressive, on aura :

$$\text{Onde laser plane de vecteur d'onde } \mathbf{k} : \quad \kappa(\mathbf{r}) = \kappa_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (4.52)$$

où l'amplitude κ_0 sera proportionnelle au champ électrique de l'onde laser, donc à la racine carrée de son intensité.

Pour être utile dans le problème qui nous intéresse ici, à savoir la génération de champs de jauge artificiels, ce couplage entre état électronique fondamental et état électronique excité doit pouvoir se faire sans émission spontanée de photons. De tels processus d'émission spontanée sont en effet incohérents et constituent des sources de chauffage pour le gaz atomique que l'on cherche à manipuler. L'utilisation d'un état électronique excité n'est donc possible que pour des classes d'atomes pour lesquels il existe des états excités de très longue durée de vie, bien supérieure à la durée typique d'une expérience.

En pratique, les atomes adéquats sont des atomes à deux électrons externes comme Mg, Ca, Sr, Hg, Yb : leur état fondamental est un état singulet de spin et certains états excités peuvent alors être métastables, s'ils correspondent à un triplet de spin. L'atome d'Ytterbium par exemple a pour état fondamental un état $6s6s \ ^1S_0$ et possède un état excité $6s6p \ ^3P_0$ de durée de vie estimée à plus de 10 secondes, qui convient parfaitement pour ce type d'expérience, au moins à des densités suffisamment faibles pour que les collisions inélastiques impliquant des atomes dans l'état excité soient négligeables [pour une étude de ces collisions, voir par exemple Scazza et al. (2014)]. L'utilisation de réseaux optiques, dans lesquels on peut rendre très faible la probabilité d'avoir plus d'un atome par site, permet également de contourner cette difficulté liée aux collisions inélastiques.

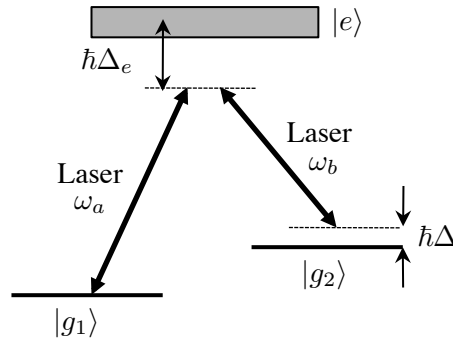


FIGURE 4.8. Excitation d'une transition Raman entre deux sous-niveaux fondamentaux $|g_1\rangle$ et $|g_2\rangle$.

3-2 Le modèle d'une transition Raman

Nous avons considéré dans le paragraphe ci-dessus une transition entre l'état fondamental $|g\rangle$ et un état excité $|e\rangle$, couplé à $|g\rangle$ par une transition dipolaire électrique. Pour la plupart des espèces atomiques, notamment les atomes alcalins, les états $|e\rangle$ de ce type ont une durée de vie par émission spontanée de l'ordre de quelques dizaines ou quelques centaines de nanosecondes. Cette durée de vie est beaucoup trop courte pour que la transition $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ puisse être utilisée telle quelle pour générer un champ magnétique artificiel utilisable.

On peut contourner cette difficulté en tirant parti du fait que le niveau fondamental est lui-même composé de plusieurs sous-niveaux, et en utilisant des transitions Raman entre ces sous-niveaux (figure 4.8). Considérons deux sous-niveaux $|g_1\rangle$ et $|g_2\rangle$, séparés par l'énergie $E_2 - E_1$, et supposons qu'on éclaire l'atome par deux ondes lumineuses de pulsations respectives ω_a et ω_b avec :

$$\hbar(\omega_a - \omega_b) \approx E_2 - E_1. \quad (4.53)$$

Les deux niveaux $|g_1\rangle$ et $|g_2\rangle$ peuvent être couplés de manière cohérente par l'intermédiaire d'une transition impliquant un (ou plusieurs) états excités électroniques. Dans le cas où un seul état $|e\rangle$ est impliqué, le couplage peut

s'écrire (après passage dans le référentiel tournant) :

$$\hat{V}_{AL} = \frac{\hbar\kappa_a}{2}|e\rangle\langle g_1| + \frac{\hbar\kappa_b}{2}|e\rangle\langle g_2| + \text{h.c.} \quad (4.54)$$

On peut alors éliminer l'état excité pour se ramener à un hamiltonien effectif agissant dans le sous-espace engendré par les deux états $|g_1\rangle$ et $|g_2\rangle$. Par exemple, le couplage permettant de passer de $|g_1\rangle$ à $|g_2\rangle$, par absorption d'un photon dans l'onde a , puis émission stimulée d'un photon dans l'onde b , est donné à l'ordre le plus bas par la fréquence de Rabi effective :

$$\frac{\hbar\kappa_{\text{eff}}}{2} = \left(\frac{\hbar\kappa_a}{2}\right)_{g_1 \leftrightarrow e} \times \frac{1}{\hbar\Delta_e} \times \left(\frac{\hbar\kappa_b^*}{2}\right)_{e \leftrightarrow g_2} \quad (4.55)$$

L'hamiltonien décrivant la dynamique interne de l'atome dans le sous-espace $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle\}$ est une matrice 2×2 de structure similaire à (4.51), où l'on remplace le désaccord $\Delta = \omega - \omega_0$ par le désaccord Raman :

$$\Delta = \hbar(\omega_a - \omega_b) - (E_2 - E_1) \quad (4.56)$$

et κ par κ_{eff} . En particulier, si les ondes a et b sont des ondes planes de vecteurs d'onde \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_2 , cette fréquence de Rabi effective s'écrit

$$\text{Ondes planes } \mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b : \quad \kappa_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = \kappa_0 e^{i(\mathbf{k}_a - \mathbf{k}_b) \cdot \mathbf{r}}. \quad (4.57)$$

En modifiant l'angle entre les vecteurs d'onde \mathbf{k}_a et \mathbf{k}_b , on peut ajuster le transfert d'impulsion dans cette transition Raman depuis une valeur quasiment nulle (quand \mathbf{k}_a et \mathbf{k}_b sont colinéaires⁴) jusqu'à $2k_0 = 2\omega_0/c$, quand \mathbf{k}_a et \mathbf{k}_b sont opposés. Cette flexibilité dans le choix du transfert d'impulsion, à désaccord Δ donné, est un élément très appréciable de ces transitions Raman.

Les déplacements lumineux. Quand on utilise une transition Raman, il faut compléter l'hamiltonien précédent (4.51) en ajoutant aux coefficients diagonaux les déplacements lumineux des états $|g_1\rangle$ et $|g_2\rangle$. Ces déplacements correspondent aux processus *absorption-émission stimulée* partant de

4. On retrouve alors le résultat que l'on obtiendrait en induisant la transition $g_1 \leftrightarrow g_2$ par une micro-onde.

et revenant sur $|g_1\rangle$ (et idem pour $|g_2\rangle$). Dans le modèle d'atome à trois niveaux adopté ici, ils valent $|\kappa_j|^2/4\Delta_e$ ($j = 1, 2$), de sorte que l'hamiltonien effectif dans le sous-espace $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle\}$ s'écrit :

$$\hat{H}_{\text{interne}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta + |\kappa_a|^2/2\Delta_e & \kappa_a^*\kappa_b/2\Delta_e \\ \kappa_a\kappa_b^*/2\Delta_e & -\Delta + |\kappa_b|^2/2\Delta_e \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

Quand les ondes a et b sont des ondes planes, ces déplacements lumineux sont uniformes dans l'espace et peuvent donc être réintégrés dans la définition des énergies E_1 et E_2 des sous-niveaux $|g_1\rangle$ et $|g_2\rangle$.

Signalons un cas particulier remarquable pour un désaccord Raman Δ nul. Dans ce cas, l'hamiltonien effectif

$$\hat{H}_{\text{interne}} = \frac{\hbar}{4\Delta_e} \begin{pmatrix} |\kappa_a|^2 & \kappa_a^*\kappa_b \\ \kappa_a\kappa_b^* & |\kappa_b|^2 \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

est facile à diagonaliser. En particulier, une de ses deux valeurs propres vaut 0 et le vecteur propre associé est l'état noir (Arimondo 1996):

$$|\psi_{\text{noir}}\rangle \propto \kappa_b|g_1\rangle - \kappa_a|g_2\rangle, \quad (4.60)$$

dont on peut vérifier immédiatement qu'il n'est pas couplé à l'état excité $|e\rangle$ par le couplage (4.54).

3-3 Transitions Raman : alcalins vs. lanthanides

Comme nous l'avons indiqué, l'utilisation d'une transition Raman entre états issus du niveau fondamental est un moyen très efficace pour réduire le chauffage et la décohérence dus aux processus d'émission spontanée. Toutefois, cette réduction n'est pas forcément suffisante pour les atomes les plus « populaires » dans les expériences d'atomes froids, à savoir les atomes alcalins. Une classe d'atomes beaucoup plus favorable est tirée de la catégorie des lanthanides, erbium ou dysprosium par exemple. Les résultats de plusieurs expériences manipulant ces atomes ont récemment été publiés (Aikawa et al. 2012; Lu et al. 2012) et nous allons brièvement expliquer en quoi ces espèces atomiques sont très prometteuses par rapport aux alcalins. Nous allons pour cela nous intéresser au facteur de mérite

$$\mathcal{M} = \frac{\kappa_{\text{eff}}}{\gamma} \quad (4.61)$$

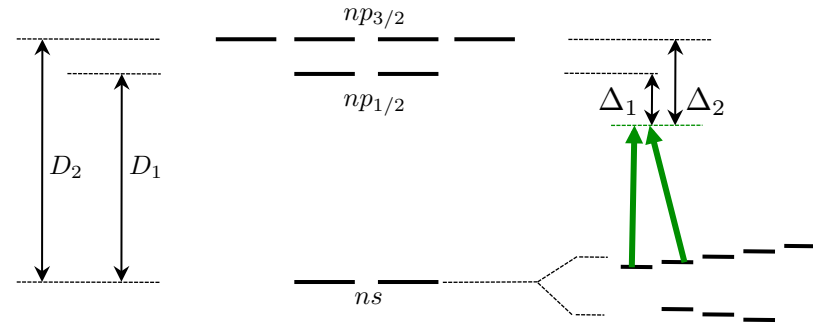


FIGURE 4.9. Transition de résonance d'un atome alcalin, avec la structure fine de l'état excité et la structure hyperfine du niveau fondamental, représentée ici pour un spin nucléaire $I = 3/2$ (cas de ${}^7\text{Li}$, ${}^{23}\text{Na}$, ${}^{39}\text{K}$, ${}^{41}\text{K}$, ${}^{87}\text{Rb}$). Le clivage des sous-niveaux Zeeman représenté sur la figure de droite est induit par un champ magnétique extérieur.

où γ est le taux d'émission spontanée lié aux faisceaux créant le couplage Raman. Notre discussion suivra d'assez près celles de Nascimbene (2013) et Cui et al. (2013).

Les atomes alcalins. Considérons un atome alcalin, de niveau fondamental électronique $|g\rangle \equiv |ns\rangle$, éclairé par un faisceau lumineux de fréquence relativement proche de la raie de résonance de l'atome $ns \leftrightarrow np$. On rappelle que le premier niveau excité est en fait clivé en deux sous-niveaux $np_{1/2}$ et $np_{3/2}$ du fait de l'interaction de structure fine, ce qui donne naissance à deux raies de résonance D_1 et D_2 (le fameux « doublet jaune » du sodium par exemple). Par ailleurs, le spin I du noyau étant non nul, le niveau fondamental ns et les niveaux excités $np_{1/2}$ et $np_{3/2}$ sont également clivés par l'interaction de structure hyperfine. En particulier, le niveau fondamental se décompose en deux sous-niveaux de moment angulaire $F = I \pm 1/2$ (figure 4.9).

Supposons qu'un champ magnétique extérieur soit appliqué pour lever la dégénérescence entre les différents états Zeeman. Quand on éclaire l'atome par deux faisceaux lumineux de fréquence et de polarisations bien choisies, des transitions Raman résonantes peuvent se produire entre états

Zeeman adjacents (figure 4.9 à droite) :

$$|g, F, m_F\rangle \leftrightarrow |g, F, m_F \pm 1\rangle. \quad (4.62)$$

L'ordre de grandeur de l'élément de matrice correspondant est

$$\kappa_{\text{eff}} \sim \kappa^2 \left(\frac{1}{\Delta_2} - \frac{1}{\Delta_1} \right) \quad (4.63)$$

où $\Delta_1 = \omega - \omega_1$ et $\Delta_2 = \omega - \omega_2$ sont les désaccords du laser par rapport aux transitions de résonance D_1 et D_2 . Les contributions de ces deux transitions apparaissent avec des signes opposés dans (4.63), ce qui correspond à une interférence destructive entre les deux chemins allant de $|g, F, m_F\rangle$ à $|g, F, m_F \pm 1\rangle$, en passant par $np_{1/2}$ ou $np_{3/2}$.

Rappelons l'origine de ce phénomène, discuté plus en détail dans le cours de l'an dernier. Le couplage atome-lumière est de type dipolaire électrique, en $q\mathbf{r} \cdot \mathcal{E}$, où \mathbf{r} est la position de l'électron externe de l'atome et \mathcal{E} le champ électrique lumineux. Ce couplage porte donc uniquement sur les variables orbitales de l'électron et ne concerne pas son spin. Le fait que l'on puisse malgré tout basculer le spin de l'électron dans une transition Raman provient du couplage spin-orbite responsable de la levée de dégénérescence entre $np_{1/2}$ et $np_{3/2}$. Or, quand on prend un désaccord lumineux grand devant la structure fine ($\Delta_1 \approx \Delta_2$), l'effet de ce couplage spin-orbite devient négligeable et il est normal que le couplage Raman tende vite vers 0 (comme $1/\Delta^2$), plus rapidement qu'on aurait pu le supposer naïvement à partir de (4.55).

Le taux d'émission spontanée pour un atome alcalin vaut quant à lui (à des facteurs numériques près)

$$\gamma \sim \Gamma \kappa^2 \left(\frac{1}{\Delta_1^2} + \frac{1}{\Delta_2^2} \right), \quad (4.64)$$

où Γ^{-1} désigne la durée de vie radiative des niveaux excités $np_{1/2}$ et $np_{3/2}$. L'élément de matrice Raman et le taux d'émission spontanée sont donc tous deux proportionnels à l'intensité lumineuse (κ^2), si bien que le facteur de mérite \mathcal{M} ne dépend pas de cette intensité, mais simplement du désaccord. Le facteur de mérite optimal est obtenu en prenant un faisceau laser tel que $\Delta_1 \approx -\Delta_2$, ce qui conduit à

$$\mathcal{M} \sim \frac{\Delta_{\text{s.f.}}}{\Gamma}, \quad (4.65)$$

où $\Delta_{\text{s.f.}} = \Delta_1 - \Delta_2$ représente l'écart de structure fine entre les niveaux $np_{1/2}$ et $np_{3/2}$.

Pour l'atome de rubidium, une fois les facteurs numériques correctement pris en compte, ce facteur de mérite vaut environ $1.5 \cdot 10^5$, ce qui correspond à un chauffage d'une quinzaine de nanokelvins par seconde si on prend l'élément de matrice Raman égal à l'énergie de recul $\hbar^2 k^2 / 2M$ (valeur minimale pour générer des champs de jauge dans l'approximation adiabatique). Si l'on souhaite travailler avec des atomes fermioniques, il faut se tourner vers le potassium 40 ; le facteur de mérite est alors beaucoup plus faible et le taux de chauffage pour $\hbar\kappa_{\text{eff}} = E_r$ atteint 700 nK/s (Nascimbene 2013). Ces taux de chauffage sont notablement trop grands pour les recherches portant sur les états fortement corrélés ; nous verrons en effet que les énergies caractérisant ces états sont elles-mêmes de l'ordre de la dizaine de nanokelvins, et les temps nécessaires pour atteindre l'état d'équilibre thermodynamique peuvent dépasser la seconde.

Lantanides : erbium, dysprosium. Considérons maintenant des espèces atomiques comme l'erbium et le dysprosium. Les propriétés électroniques de ces atomes sont très différentes de celles des alcalins. On peut dans une certaine mesure considérer ces atomes comme ayant deux électrons externes (niveau $6s^2$ pour Dy), mais leur état fondamental n'est pas de moment cinétique orbital nul en raison des électrons disposés sur la dernière couche interne incomplète ($4f^{10}$ pour Dy, conduisant à un moment cinétique orbital $L = 6$). Le bas du spectre d'énergie de ces atomes comporte donc des raies correspondant à l'excitation de l'un des deux électrons externes ou d'un électron de cette couche interne.

Nous avons reporté sur la figure 4.10 quelques niveaux pertinents du dysprosium [pour l'erbium, une étude détaillée est présentée par Lepers et al. (2013)]. On trouve tout d'abord une raie bleue intense, correspondant à la transition de résonance $6s^2 \rightarrow 6s 6p$ de largeur naturelle $\Gamma_b/2\pi = 30$ MHz. Cette raie est clivée par l'interaction de structure fine en trois composantes de longueurs d'onde 405, 419 et 421 nm. Si cette raie était seule présente, on rencontrerait le même problème que pour les atomes alcalins pour générer un élément de matrice Raman important : quand le désaccord du laser est grand devant l'écart entre ces raies, l'élément de matrice décroît comme le carré du désaccord et le facteur de mérite \mathcal{M} ne serait

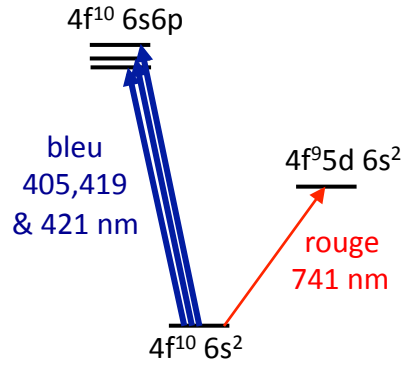


FIGURE 4.10. Quelques niveaux pertinents du Dysprosium : la raie de résonance principale, clivée par la structure fine, est dans le bleu. Un couplage Raman efficace entre états Zeeman de l'état fondamental est obtenu en prenant un laser proche de la résonance avec une raie étroite située dans le rouge, par exemple la raie à 741 nm.

pas très bon. Mais il existe également de nombreuses raies étroites dans le spectre du dysprosium atomique, comme la raie rouge correspondant à l'excitation d'un électron de la couche interne $4f^{10} \rightarrow 4f^9 5d$ à 741 nm (terme $^5K^o$), de largeur $\Gamma_r/2\pi \sim 2$ kHz (Cui et al. 2013).

L'idée est alors de prendre une transition Raman proche de la résonance avec ce niveau étroit, avec un désaccord optimisant le facteur de mérite. Plus précisément, le couplage Raman est d'ordre

$$\kappa_{\text{eff}} \sim \frac{(d_r \mathcal{E})^2}{\Delta_r} \quad (4.66)$$

(où l'indice r fait référence à la transition *rouge*) alors que le taux d'émission spontanée est obtenu en sommant les contributions des raies rouge et

bleue⁵ :

$$\gamma \sim \Gamma_r \frac{(d_r \mathcal{E})^2}{\Delta_r^2} + \Gamma_b \frac{(d_b \mathcal{E})^2}{\Delta_b^2}. \quad (4.67)$$

Dans ces expressions, on a introduit les dipôles atomiques d_b et d_r associés aux transitions bleue et rouge, avec

$$\frac{\Gamma_r}{\Gamma_b} \sim \frac{d_r^2}{d_b^2}. \quad (4.68)$$

L'optimisation du facteur de mérite est alors simple et conduit à un désaccord tel que

$$|\Delta_r| \sim |\Delta_b| \frac{\Gamma_r}{\Gamma_b}. \quad (4.69)$$

Comme le rapport Γ_r/Γ_b est très petit devant 1 ($\sim 10^{-4}$), cela revient à choisir un laser pour le couplage Raman désaccordé d'un dixième de nanomètre environ par rapport à la raie rouge. Le facteur de mérite est alors simplement

$$\mathcal{M} \sim \frac{\Delta_b}{\Gamma_b}, \quad (4.70)$$

ce qui est beaucoup plus grand que le résultat pour les alcalins car Δ_b est de l'ordre d'une fréquence optique. Une fois tous les facteurs numériques pris en compte, on trouve un taux de chauffage inférieur au nanokelvin/seconde pour un couplage Raman égal à l'énergie de recul, aussi bien pour des isotopes bosoniques que fermioniques ; cela semble nettement plus prometteur que le cas des atomes alcalins (Nascimbene 2013).

4 Potentiels vecteur et scalaire pour un atome

La première transposition des concepts de potentiels de jauge géométriques au cas d'un atome en mouvement dans une onde laser est due à Dum & Olshanii (1996), qui s'intéressaient au mouvement d'un atome dans

5. Nous donnons ici des expressions de type « approximation de champ tournant », alors que pour les grands désaccords en jeu pour la transition bleue, les termes anti-résonnants peuvent avoir une contribution significative. Nous ne pouvons donc espérer obtenir ici que l'ordre de grandeur du facteur de mérite. Un calcul plus précis est bien sûr possible, au prix d'expressions mathématiques moins transparentes.

un réseau optique. Ils ont établi les expressions générales des potentiels de jauge, puis se sont concentrés sur le cas du potentiel scalaire : un point clé de leur approche est qu'un état « noir », combinaison linéaire d'états internes en principe non couplée à la lumière, ressent néanmoins une force non nulle due au gradient du potentiel scalaire géométrique.

Dans ce paragraphe, nous allons commencer par établir une expression générale pour ces potentiels, puis particulariser notre discussion à la situation la plus simple, le cas d'un atome à deux niveaux. Nous terminerons par une description de la première expérience ayant mis en évidence le potentiel géométrique scalaire sur un atome, faite par Dutta et al. (1999) dans le prolongement de la proposition de Dum & Olshanii (1996).

4-1 Expressions générales

Au paragraphe précédent, nous avons mis l'expression de l'hamiltonien interne de l'atome couplé au rayonnement sous forme d'une matrice $(2F + 1) \times (2F + 1)$. Par exemple, pour une atome à deux niveaux, nous avons écrit cet hamiltonien dans la base $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ sous la forme

$$\hat{H}_{\text{interne}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \kappa^* \\ \kappa & -\Delta \end{pmatrix}. \quad (4.71)$$

Cette matrice peut dépendre *a priori* de la position du centre de masse de l'atome par l'intermédiaire de plusieurs paramètres :

- la phase du ou des faisceaux lasers incidents sur l'atome, qui apparaît dans la phase du coefficient κ ,
- l'intensité du faisceau laser, qui est proportionnelle à $|\kappa|^2$,
- un gradient de polarisation du faisceau lumineux,
- une possible variation spatiale du désaccord Δ , obtenue par exemple en plongeant l'atome dans un champ magnétique non homogène.

La procédure générale que nous avons suivie au chapitre précédent pour dégager la notion de connexion de Berry s'applique telle quelle dans ce cas. Pour toute position \mathbf{r} du centre de masse, on peut diagonaliser la matrice \hat{H}_{interne} et obtenir ses $2F + 1$ états propres $|\psi_n(\mathbf{r})\rangle$, d'énergies notées $E_n(\mathbf{r})$, que nous appellerons *états habillés*. Supposons l'atome préparé

à l'instant initial $t = 0$ dans un de ces états habillés :

$$\Psi(\mathbf{r}, 0) = \phi_\ell(\mathbf{r}, 0) |\psi_\ell(\mathbf{r})\rangle. \quad (4.72)$$

Si les conditions nécessaires à l'approximation adiabatique sont remplies et si on peut négliger les processus d'émission spontanée, l'atome suivra adiabatiquement cet état habillé et on aura à chaque instant :

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \phi_\ell(\mathbf{r}, t) |\psi_\ell(\mathbf{r})\rangle. \quad (4.73)$$

Nous avons vu au chapitre précédent que le mouvement externe de l'atome, décrit par l'évolution de la fonction d'onde $\phi_\ell(\mathbf{r}, t)$ est donné par une équation de Schrödinger pour une particule scalaire (sans structure interne) soumise au potentiel vecteur (connexion de Berry) :

$$\mathcal{A}_\ell(\mathbf{r}) = i\hbar \langle \psi_\ell | \nabla \psi_\ell \rangle, \quad (4.74)$$

cette équation de Schrödinger effective s'écrivant ici

$$i\hbar \frac{\partial \phi_\ell}{\partial t} = \left[\frac{(\hat{\mathbf{p}} - \mathcal{A}_\ell(\mathbf{r}))^2}{2M} + E_\ell(\mathbf{r}) + \mathcal{V}_\ell(\mathbf{r}) \right] \phi_\ell(\mathbf{r}, t), \quad (4.75)$$

où $\mathcal{V}_\ell(\mathbf{r})$ est le potentiel scalaire additionnel, apparaissant lui aussi du fait de l'approximation adiabatique :

$$\mathcal{V}_\ell(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{2M} \sum_{n \neq \ell} \langle \psi_n | \nabla \psi_\ell \rangle^2. \quad (4.76)$$

4-2 Le résultat pour un atome à deux niveaux

Nous pouvons expliciter les résultats (4.74) et (4.76) pour le cas de l'atome à deux niveaux en mettant la matrice 2×2 donnée en (4.71) sous la forme

$$\hat{H}_{\text{interne}} = \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \quad (4.77)$$

avec pour la fréquence de Rabi généralisée Ω , l'angle de mélange θ et l'angle de phase ϕ :

$$\Omega = \sqrt{\Delta^2 + |\kappa|^2}, \quad \cos \theta = \frac{\Delta}{\Omega}, \quad \sin \theta = \frac{|\kappa|}{\Omega}, \quad \kappa = |\kappa| e^{i\phi}, \quad (4.78)$$

où Ω , θ et ϕ sont des fonction de \mathbf{r} , avec $\theta \in [0, \pi]$. Les deux états habillés sont alors

$$|\psi_+\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad |\psi_-\rangle = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -e^{i\phi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad (4.79)$$

avec les énergies associées :

$$E_{\pm} = \pm \frac{\hbar\Omega}{2}. \quad (4.80)$$

La connexion de Berry pour chacun de ces états se calcule aisément et vaut

$$\mathcal{A}_{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2} (-1 \pm \cos \theta) \nabla \phi. \quad (4.81)$$

Il faut donc que l'onde lumineuse présente un gradient de phase pour donner naissance à un potentiel vecteur géométrique non nul. En particulier, une onde lumineuse stationnaire conduit toujours à $\mathcal{A} = 0$.

Le potentiel scalaire vaut quant à lui

$$\mathcal{V}_{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{8M} \left[(\nabla\theta)^2 + \sin^2 \theta (\nabla\phi)^2 \right], \quad (4.82)$$

et il crée une bosse de potentiel aux points où les états habillés varient vite avec la position \mathbf{r} .

Remarque : changement de jauge. La valeur de \mathcal{A}_{\pm} dépend du choix de jauge, c'est-à-dire de la phase locale qu'on choisit pour écrire les états $|\psi_{\pm}\rangle$. Dans (4.79), nous avons pris une convention qui permet un raccord facile (sans phase additionnelle) à l'état $|g\rangle$. Un autre choix « naturel » consiste à favoriser plutôt le raccord à $|e\rangle$ et prendre ainsi

$$|\psi'_+\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad |\psi'_-\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\phi} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (4.83)$$

ce qui conduit à

$$\mathcal{A}'_{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2} (1 \pm \cos \theta) \nabla \phi. \quad (4.84)$$

On peut également panacher et prendre (par exemple) la valeur (4.79) pour $|\psi_+\rangle$ et la valeur (4.83) pour $|\psi'_-\rangle$... En d'autres termes, l'invariance de jauge se manifeste ici par la possibilité d'ajouter ou retrancher à \mathcal{A}_{\pm} un terme proportionnel seulement à $\nabla\phi$. Le potentiel scalaire est quant à lui invariant de jauge.

4-3 Le potentiel scalaire dans un réseau « gris »

Pour mettre en évidence le potentiel scalaire \mathcal{V} , Dutta et al. (1999) ont utilisé un réseau optique à une dimension. Suivant l'idée initiale de Dum & Olshanii (1996), ils ont choisi une configuration où le niveau habillé $E_1(\mathbf{r})$ était quasiment plat, pour que la force due au potentiel scalaire géométrique $\mathcal{V}_1(\mathbf{r})$ constitue une modification importante de la dynamique des atomes.

Le réseau 1D est constitué de deux ondes lumineuses contre-propageantes le long de l'axe z . Ces deux ondes ont des polarisations linéaires croisées ϵ_x et ϵ_y (figure 4.11a). Quand on additionne de manière cohérente les champs électrique de ces deux ondes, on obtient une intensité constante, mais une polarisation résultante qui varie le long de l'axe z . En certains points, cette polarisation est linéaire et orientée à 45° par rapport aux axes x, y . À une distance $\lambda/8$ de ces points, la polarisation est circulaire droite ou circulaire gauche. Entre ces points particuliers, la polarisation est généralement elliptique.

Le laser est choisi presque résonnant avec la transition de la raie D_1 de l'atome de rubidium (isotope 87), plus précisément avec la transition reliant $|g, F=2\rangle$ et $|e, F=2\rangle$ (figure 4.11b). Si cette transition était la seule en jeu, on peut montrer qu'un des états habillés serait « noir » en tout point de l'espace, c'est-à-dire que l'énergie $E_1(z)$ du niveau habillé $|\psi_1(z)\rangle$ serait nulle. Ceci se comprend simplement pour quelques points particuliers de l'axe z :

- Là où la polarisation est circulaire σ_{\pm} , l'état $|\psi_1(z)\rangle$ correspondant à $E_1 = 0$ est l'état polarisé $|g, F=2, m_z = \pm 2\rangle$.
- Là où la polarisation est linéaire, on peut prendre l'axe \mathbf{u} de cette polarisation comme axe de quantification et l'état $|\psi_1(z)\rangle$ correspond alors à $|g, F=2, m_u = 0\rangle$. En effet, pour F entier, le coefficient de Clebsch-Gordan reliant les deux états $|g, F, m=0\rangle$ et $|e, F, m=0\rangle$ est toujours nul.

Par conséquent, si cette transition $|g, F=2\rangle$ et $|e, F=2\rangle$ était la seule en jeu, on en déduirait que $E_1(z) = 0$ pour tout z , ce qui veut dire que la dynamique serait uniquement due au potentiel scalaire $\mathcal{V}(z)$: son identification serait facile.

La proximité du niveau excité $|e, F=1\rangle$ vient perturber un peu ce rai-

sonnement. Si les états $|g, F = 2, m_z = \pm 2\rangle$ restent noirs là où la lumière est polarisée linéairement : l'état $|g, F = 2, m_u = 0\rangle$ devient légèrement couplé à la lumière par l'intermédiaire du niveau $|e, F = 1, m_u = 0\rangle$. Il en résulte que l'énergie $E_1(z)$ est légèrement modulée le long de l'axe z , comme représenté sur la figure 4.11c. Néanmoins, cette modulation résiduelle de l'énergie $E_1(z)$ est suffisamment faible pour que le potentiel scalaire $\mathcal{V}(z)$ joue un rôle très significatif pour le niveau habillé fondamental. Ces deux fonctions sont tracées à la même échelle sur la figure 4.11 et elles ont effectivement des amplitudes comparables.

Pour étudier la dynamique des atomes dans ce réseau, Dutta et al. (1999) ont préparé les atomes par pompage optique dans les puits correspondant à la polarisation σ_+ , ces atomes étant en majorité dans le niveau habillé d'énergie le plus bas⁶. Ils ont ensuite étudié la dynamique du transfert des puits σ_+ vers les puits σ_- du fait de l'effet tunnel à travers la barrière créée par la superposition $E_1(z) + \mathcal{V}(z)$. L'oscillation tunnel correspondante est montrée sur la figure 4.11d, avec une simulation numérique reproduisant remarquablement bien le résultat expérimental.

On déduit de cette oscillation une période caractéristique ; Dutta et al. (1999) ont mesuré cette période pour différentes puissances de l'onde stationnaire et leur résultat est reporté sur la figure 4.11e. Si le potentiel $E_1(z)$ était le seul présent, on s'attendrait à ce que la période augmente avec l'intensité, puisque la hauteur de la barrière serait proportionnelle à cette intensité. Mais le potentiel scalaire géométrique $\mathcal{V}(z)$ est pratiquement indépendant de l'intensité : c'est donc lui qui domine la dynamique tunnel à basse intensité, ce qui explique pourquoi le temps tunnel tracé en figure 4.11e ne change que très peu quand on varie l'intensité lumineuse par un facteur 5 environ. Même si cette démonstration reste qualitative et repose sur des comparaisons assez sophistiquées avec un modèle théorique pour être convaincante, elle a constitué un premier pas dans la mise en évidence de l'influence des potentiels géométriques sur le mouvement d'atomes.

6. Dutta et al. (1999) n'utilisaient pas de condensat, et comptaient uniquement sur le refroidissement lumineux pour assurer cette préparation, ce qui ne leur facilitait pas la tâche...

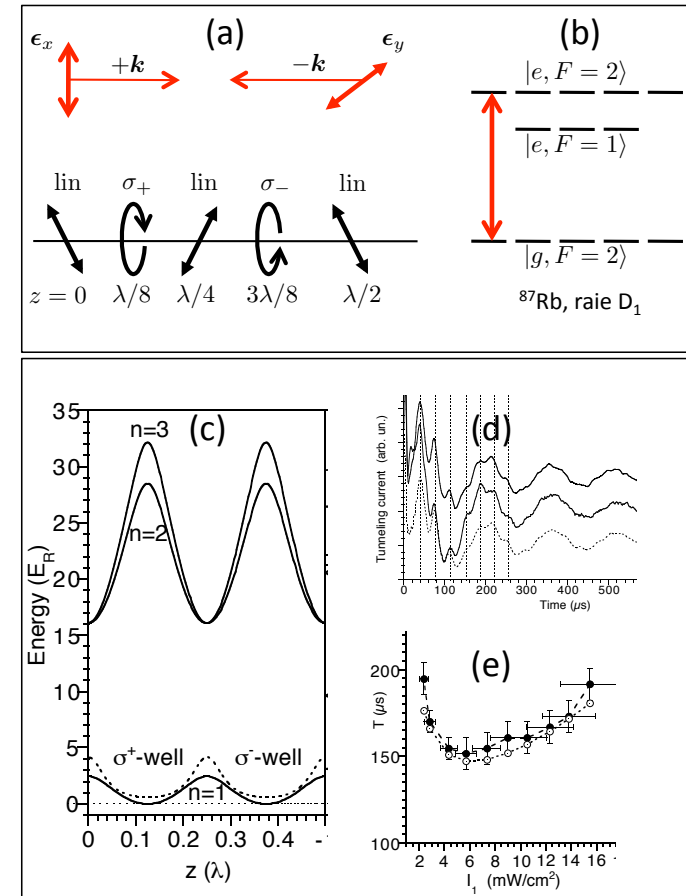


FIGURE 4.11. Mise en évidence du potentiel scalaire par Dutta et al. (1999). (a) Configuration laser 1D avec deux ondes laser contre-propageantes et des polarisations linéaires croisées. La polarisation résultante oscille le long de l'axe z , en passant de linéaire à circulaire avec une période $\lambda/2$. (b) Schéma de niveau utilisé : raie D_1 de ^{87}Rb , le laser étant quasi-résonnant avec la transition $F_g = 2 \leftrightarrow F_e = 2$. (c) Variations de la position des niveaux d'énergie habillés les plus bas en fonction de la position. Le potentiel scalaire est tracé en pointillé. (d) Taux de transition tunnel d'un puits de polarisation σ_+ vers un puits de polarisation σ_- (théorie et expérience). (e) Variation du taux tunnel en fonction de l'intensité lumineuse.

5 Références

- Aikawa, K., A. Frisch, M. Mark, S. Baier, A. Rietzler, R. Grimm & F. Ferlaino (2012), « Bose-Einstein Condensation of Erbium », in *Phys. Rev. Lett.* 108 (21), p. 210401.
- Arimondo, E. (1996), « Coherent population trapping in laser spectroscopy », in *Progress in Optics*, vol. 35, ed. by E. Wolf, Elsevier, , p. 259.
- Cohen-Tannoudji, C., J. Dupont-Roc & G. Grynberg (1989), *Photons and Atoms—Introduction to Quantum Electrodynamics*, New-York: Wiley.
- Cui, Xiaoling, Biao Lian, Tin-Lun Ho, Benjamin L. Lev & Hui Zhai (2013), « Synthetic gauge field with highly magnetic lanthanide atoms », in *Phys. Rev. A* 88 (1), p. 011601.
- Dalibard, Jean, Fabrice Gerbier, Gediminas Juzeliūnas & Patrik Öhberg (2011), « Colloquium : Artificial gauge potentials for neutral atoms », in *Rev. Mod. Phys.* 83 (4), pp. 1523–1543.
- Diu, B., C. Guthmann, D. Lederer & B. Roulet (1989), *Physique Statistique*, Hermann.
- Dum, R. & M. Olshanii (1996), « Gauge Structures in Atom-Laser Interaction : Bloch Oscillations in a Dark Lattice », in *Phys. Rev. Lett.* 76.11, pp. 1788–1791.
- Dutta, S. K., B. K. Teo & G. Raithel (1999), « Tunneling Dynamics and Gauge Potentials in Optical Lattices », in *Phys. Rev. Lett.* 83.10, pp. 1934–1937.
- Goldman, N., G. Juzeliūnas, P. Ohberg & I. B. Spielman (2013), « Light-induced gauge fields for ultracold atoms », arXiv :1308.6533.
- Landau, L. D. & E. M. Lifchitz (1984), *Physique Statistique*, Editions Mir.
- Landau, L. D. & E. M. Lifshitz (1982), *Mécanique*, Editions Mir.
- Lepers, M., J.-F. Wyart & O. Dulieu (2013), « Anisotropic optical trapping of ultracold erbium atoms », arXiv :1310.6149.
- Lu, Mingwu, Nathaniel Q. Burdick & Benjamin L. Lev (2012), « Quantum Degenerate Dipolar Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 108 (21), p. 215301.
- Madison, K. W., F. Chevy, W. Wohlleben & J. Dalibard (2000), « Vortices in a stirred Bose-Einstein condensate (JMO) », in *J. Mod. Opt.* 47, p. 2715.
- Moulder, Stuart, Scott Beattie, Robert P. Smith, Naaman Tammuz & Zoran Hadzibabic (2012), « Quantized supercurrent decay in an annular Bose-Einstein condensate », in *Phys. Rev. A* 86 (1), p. 013629.
- Nascimbene, Sylvain (2013), « Minimiser le chauffage associé à un couplage Raman : alcalins vs Dy », non publié.
- Rosenbusch, P., D.S. Petrov, S. Sinha, F. Chevy, V. Bretin, Y. Castin, G. Shlyapnikov & J. Dalibard (2002), « Critical rotation of a harmonically trapped Bose gas », in *Phys. Rev. Lett.* 88, p. 250403.
- Scazza, F., C. Hofrichter, M. Höfer, P. C. De Groot, I. Bloch, & S. Fölling (2014), « Observation of two-orbital spin-exchange interactions with ultracold SU(N)-symmetric fermions », arXiv :1403.4761.
- Schweikhard, V., I. Coddington, P. Engels, V. P. Mogendorff & E. A. Cornell (2004), « Rapidly Rotating Bose-Einstein Condensates in and near the Lowest Landau Level », in *Phys. Rev. Lett.* 92.4, p. 040404.