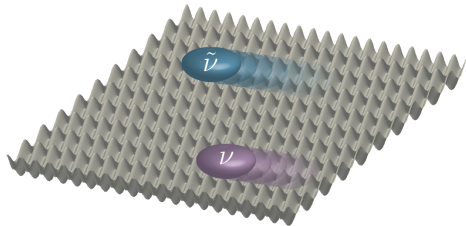


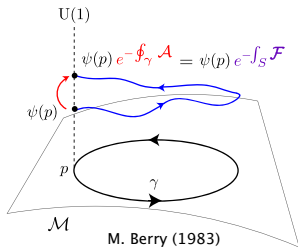
# La topologie dans le laboratoire : comment détecter le nombre de Chern et les phases topologiques dans un gaz d'atomes froids ?

Nathan Goldman



## Résumé de la Partie 1

La phase de Berry, les fibrés et le nombre de Chern



La connexion de Berry

$$\mathcal{A} = \langle \psi | \partial_{\mu} \psi \rangle dx^{\mu}$$

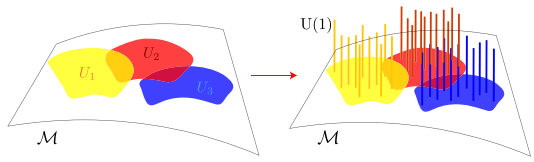
La courbure de Berry

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} = \langle \partial_{\nu} \psi | \partial_{\mu} \psi \rangle dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$$

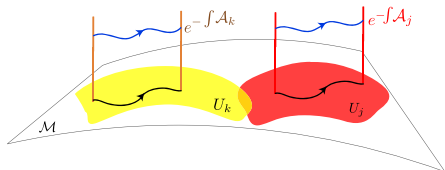
La phase de Berry et les fibrés: B. Simon (1983)

Espace de base:  $\mathcal{M}$

Fibre: U(1)



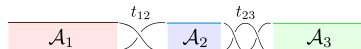
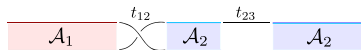
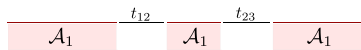
La connexion locale et la topologie des fibrés



$$\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_j + t_{jk}^{-1} dt_{jk}$$

Généralisation de Gauss-Bonnet

$$\frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{F} = \nu : \text{nb de Chern}$$



- 1 L'effet Hall quantique : Le nombre de Chern et les états de bord topologiques
  - La quantification de la conductivité de Hall
  - Le modèle de Haldane
  - Les états de bord topologiques
- 2 Implémentation du modèle de Haldane avec des atomes froids
  - Idée générale
  - Proposition spécifique
  - Comment sonder les phases topologiques ?
- 3 Comment sonder des états de bord topologiques dans un gaz atomique ?
  - Discussion générale
  - La spectroscopie
  - Imagerie directe
- 4 Mesure du nombre de Chern et le déplacement du centre de masse
  - Stratégie générale
  - Résultats numériques

## 1 L'effet Hall quantique : Le nombre de Chern et les états de bord topologiques

### La quantification de la conductivité de Hall

Le modèle de Haldane

Les états de bord topologiques

## 2 Implémentation du modèle de Haldane avec des atomes froids

Idée générale

Proposition spécifique

Comment sonder les phases topologiques ?

## 3 Comment sonder des états de bord topologiques dans un gaz atomique ?

Discussion générale

La spectroscopie

Imagerie directe

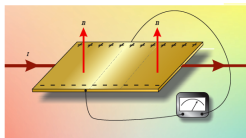
## 4 Mesure du nombre de Chern et le déplacement du centre de masse

Stratégie générale

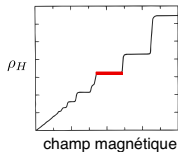
Résultats numériques

# L'effet Hall quantique (IQHE) et le nombre de Chern

- 1980: Découverte de l'effet Hall quantique (K. von Klitzing)



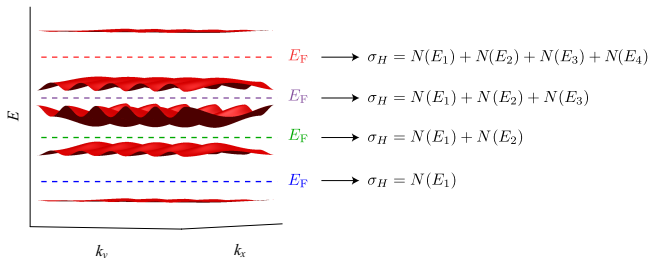
$$j_y = \sigma_H E_x$$



$$\sigma_H = 1/\rho_H = \nu \times (e^2/h)$$

- 1982: Expression de Thouless–Kohmoto–Nightingale–Nijs (TKNN)

$$\sigma_{yx} = (e^2/h)\nu = (e^2/h) \sum_{E_\alpha < E_F} N(E_\alpha) \quad N(E_\alpha) = \frac{i}{2\pi} \int (\langle \partial_{k_x} \psi | \partial_{k_y} \psi \rangle - \langle \partial_{k_y} \psi | \partial_{k_x} \psi \rangle) dk_x dk_y$$



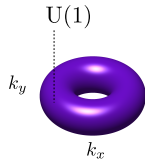
# L'effet Hall quantique (IQHE) et le nombre de Chern

- 1982: Expression de Thouless–Kohmoto–Nightingale–Nijs (TKNN)

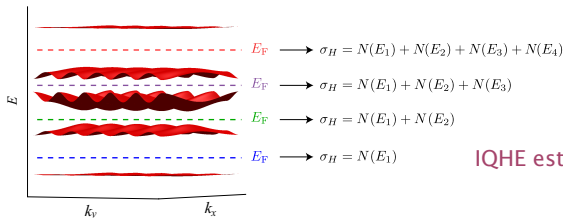
$$\sigma_{yx} = (e^2/h) \nu = (e^2/h) \sum_{E_\alpha < E_F} N(E_\alpha) \quad N(E_\alpha) = \frac{i}{2\pi} \int (\langle \partial_{k_x} \psi | \partial_{k_y} \psi \rangle - \langle \partial_{k_y} \psi | \partial_{k_x} \psi \rangle) dk_x dk_y$$

- 1983: B. Simon [+ Avron & Seiler] relie TKNN au nombre de Chern

$$N(E_\alpha) = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{F}(\psi_\alpha) = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} (\langle \partial_{k_x} \psi | \partial_{k_y} \psi \rangle - \langle \partial_{k_y} \psi | \partial_{k_x} \psi \rangle) dk_x dk_y$$



$\mathcal{F}(\psi_\alpha)$  : courbure de Berry sur le fibré  $(\mathbb{T}^2, U(1))$



**IQHE est un effet topologique!**

- 1988: D. Haldane propose un modèle pour l'effet Hall quantique...

**... sans champ magnétique!**

## 1 L'effet Hall quantique : Le nombre de Chern et les états de bord topologiques

La quantification de la conductivité de Hall

### **Le modèle de Haldane**

Les états de bord topologiques

## 2 Implémentation du modèle de Haldane avec des atomes froids

Idée générale

Proposition spécifique

Comment sonder les phases topologiques ?

## 3 Comment sonder des états de bord topologiques dans un gaz atomique ?

Discussion générale

La spectroscopie

Imagerie directe

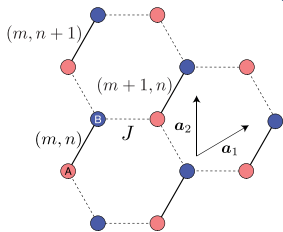
## 4 Mesure du nombre de Chern et le déplacement du centre de masse

Stratégie générale

Résultats numériques



## Le réseau en nid d'abeilles



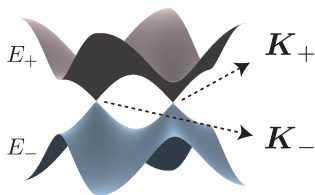
$$\hat{H} = -J \sum_{\langle j,k \rangle} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k \quad : \text{régime liaisons fortes} \quad (\text{cf. cours de Jean})$$

$$E\psi_A(m, n) = -J [\psi_B(m, n) + \psi_B(m-1, n) + \psi_B(m, n-1)]$$

$$E\psi_B(m, n) = -J [\psi_A(m, n) + \psi_A(m+1, n) + \psi_A(m, n+1)]$$

$$\text{Th. de Bloch:} \quad \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = e^{ik_x m} e^{ik_y n} \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix}$$

$$E \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix} = \hat{H}(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f(\mathbf{k}) \\ f^*(\mathbf{k}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix} \quad f(\mathbf{k}) = -J (1 + e^{-ik_x} + e^{-ik_y})$$



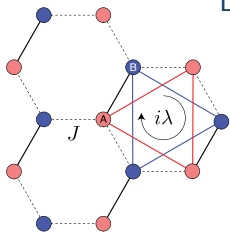
**Structure de vortex:**  $f(\mathbf{K}_\pm) = 0$

$$f(k_x, k_y) = |f| e^{-i\varphi}$$

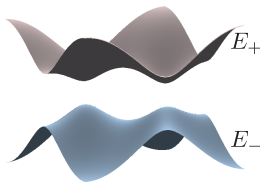
$$\oint_{S_\pm} \nabla \varphi \cdot d\mathbf{k} = \oint_{S_\pm} d\varphi = \pm 2\pi$$



## Le modèle de Haldane (1988)



$$\hat{H} = -J \sum_{\langle j,k \rangle} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k + \lambda \sum_{\langle j,k \rangle} i \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k$$



$$E \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix} = \hat{H}(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\mathbf{k}) & f(\mathbf{k}) \\ f^*(\mathbf{k}) & -g(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix}$$

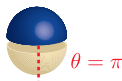
**Nb de Chern associé à la bande inférieure?**  $N(E_-) = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{F}$   
 On introduit des coordonnées sphériques

$$\hat{H}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} g(\mathbf{k}) & f(\mathbf{k}) \\ f^*(\mathbf{k}) & -g(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = E_+(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$|\phi_-\rangle = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad \mathcal{A} = \langle \phi_- | \partial_\mu \phi_- \rangle dx^\mu = -\frac{i}{2} (1 - \cos \theta) d\varphi$$

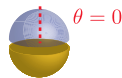
## Le modèle de Haldane (1988)

$$|\phi_{-}\rangle = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad \mathcal{A} = -\frac{i}{2}(1 - \cos \theta)d\varphi$$



Transformation de jauge

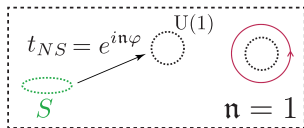
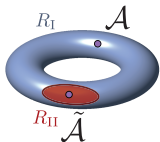
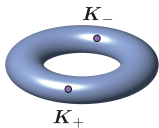
$$|\tilde{\phi}_{-}\rangle = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathcal{A}} = \frac{i}{2}(1 + \cos \theta)d\varphi$$



singularité

$$\boxed{\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_N \quad \tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{A}_S} \quad : \text{on retombe sur un monopole!} \\ \text{(de charge } g=1/2\text{)}$$

Prenons le paramètre  $\lambda > 0$  :  $\theta(\mathbf{K}_{+}) = \pi$  et  $\theta(\mathbf{K}_{-}) = 0$



$$\nu = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{F} = \frac{i}{2\pi} \int_{\text{frontière}=S_{+}} \mathcal{A} - \tilde{\mathcal{A}} = \frac{i}{2\pi} \int_{S_{+}} (-i)d\varphi = 1$$

## 1 L'effet Hall quantique : Le nombre de Chern et les états de bord topologiques

La quantification de la conductivité de Hall

Le modèle de Haldane

Les états de bord topologiques

## 2 Implémentation du modèle de Haldane avec des atomes froids

Idée générale

Proposition spécifique

Comment sonder les phases topologiques ?

## 3 Comment sonder des états de bord topologiques dans un gaz atomique ?

Discussion générale

La spectroscopie

Imagerie directe

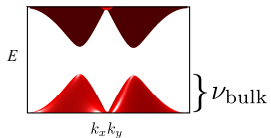
## 4 Mesure du nombre de Chern et le déplacement du centre de masse

Stratégie générale

Résultats numériques

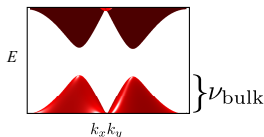
# La correspondance intérieur $\leftrightarrow$ bord (*bulk-edge correspondence*)

Dans le bulk

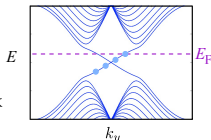
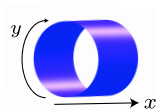


# La correspondance intérieur $\leftrightarrow$ bord (*bulk-edge correspondence*)

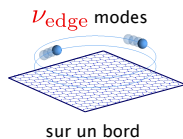
Dans le bulk



Sur les bords?



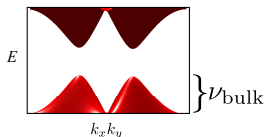
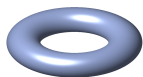
états de bord



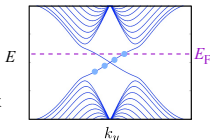
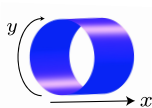
- Le nombre de modes chiraux sur les bords  $\nu_{\text{edge}}$  est un *invariant topologique*, protégé par le gap (cf. Hatsugai 1993).

# La correspondance intérieur $\leftrightarrow$ bord (*bulk-edge correspondence*)

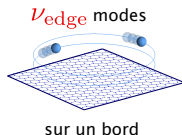
Dans le bulk



Sur les bords?



états de bord



- Le nombre de modes chiraux sur les bords  $\nu_{\text{edge}}$  est un *invariant topologique*, protégé par le gap (cf. Hatsugai 1993).
- Correspondance bulk-edge : ce nombre  $\nu_{\text{edge}}$  est égal au nb de Chern (bulk)

$$\nu_{\text{edge}} = \nu_{\text{bulk}} = \nu \quad \sigma_H = \frac{e^2}{h} \nu$$

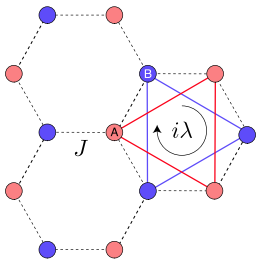
- La chiralité (sens de propagation sur le bord) :  $\text{sign}(\partial E / \partial k_y) = \text{sign}(\nu)$

*Isolant de Chern* = isolant dans le bulk présentant des états de bord chiraux (protégés par la topologie)

- 1 L'effet Hall quantique : Le nombre de Chern et les états de bord topologiques
  - La quantification de la conductivité de Hall
  - Le modèle de Haldane
  - Les états de bord topologiques
- 2 Implémentation du modèle de Haldane avec des atomes froids
  - Idée générale**
  - Proposition spécifique
  - Comment sonder les phases topologiques ?
- 3 Comment sonder des états de bord topologiques dans un gaz atomique ?
  - Discussion générale
  - La spectroscopie
  - Imagerie directe
- 4 Mesure du nombre de Chern et le déplacement du centre de masse
  - Stratégie générale
  - Résultats numériques



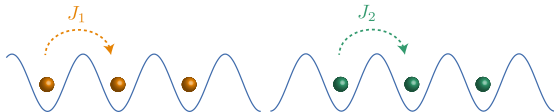
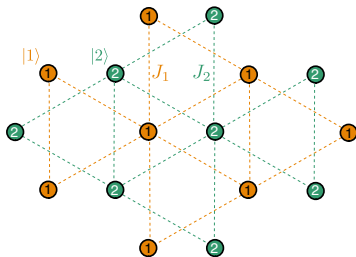
## Modèle de Haldane



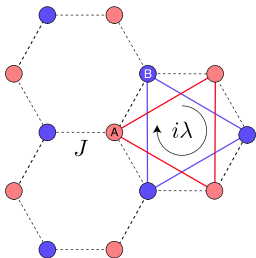
## Sauts sur un réseau optique

(cf. cours de J. Dalibard)

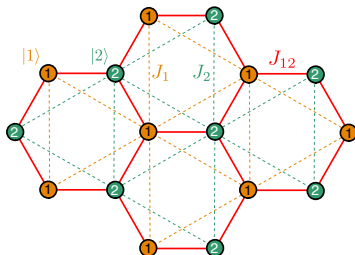
## Modèle de Haldane avec des atomes froids?



## Modèle de Haldane

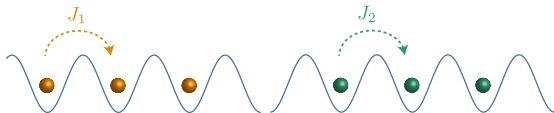


## Modèle de Haldane avec des atomes froids?



## Sauts sur un réseau optique

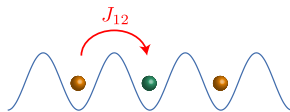
(cf. cours de J. Dalibard)



### Sauts assistés par laser

$$J_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = J \times e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2}$$

$\mathbf{p}$  = vecteur d'onde associé au couplage



Dalibard, Gerbier et al. Rev. Mod. Phys. 2011

Goldman, Juzeliunas, Ohberg, Spielman: arXiv:1308.6533

- 1 L'effet Hall quantique : Le nombre de Chern et les états de bord topologiques
  - La quantification de la conductivité de Hall
  - Le modèle de Haldane
  - Les états de bord topologiques
- 2 Implémentation du modèle de Haldane avec des atomes froids
  - Idée générale
  - Proposition spécifique**
  - Comment sonder les phases topologiques ?
- 3 Comment sonder des états de bord topologiques dans un gaz atomique ?
  - Discussion générale
  - La spectroscopie
  - Imagerie directe
- 4 Mesure du nombre de Chern et le déplacement du centre de masse
  - Stratégie générale
  - Résultats numériques

# Réseaux optiques et longueur d'onde anti-magique

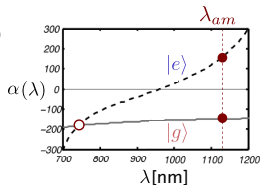
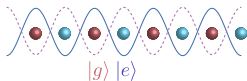
Réseaux optiques et polarisabilité

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \underbrace{\alpha(\lambda)}_{\text{polarisabilité}} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2$$

dépend de: (a) l'état interne de l'atome  
(b) la longueur d'onde du laser

Longueur d'onde anti-magique (Yb)

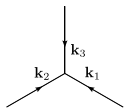
$$V_{e,g}(\mathbf{r}) = \pm \frac{1}{2} \alpha(\lambda_{am}) |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2$$



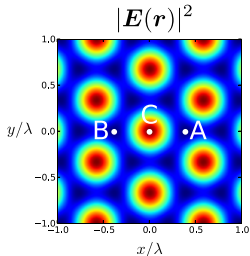
Gerbier-Dalibard NJP '10

# Configuration des lasers et le réseau hybride

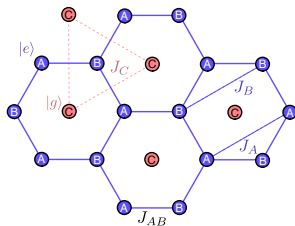
Trois lasers



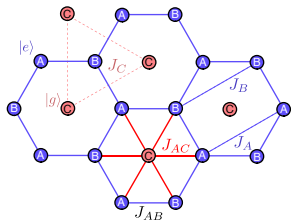
$$\mathbf{E}_i = E_0 e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \mathbf{1}_z, \quad |\mathbf{k}_i| = \frac{2\pi}{\lambda_{am}}$$



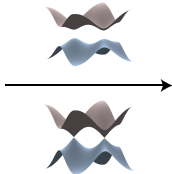
Le réseau hybride



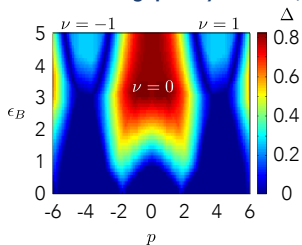
## Le réseau hybride couplé par laser



$$J_{AC}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = J \times e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2}$$



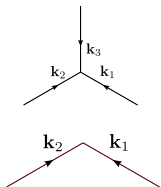
## Ouverture du gap et symétrie A/B



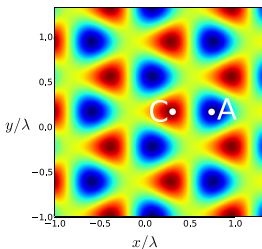
Isolant de Chern pour  $\epsilon_B \gg J$

## Le réseau auxiliaire:

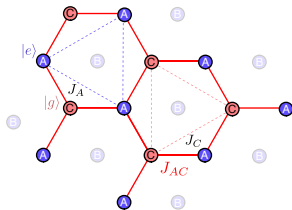
2 lasers polarisés dans le plan



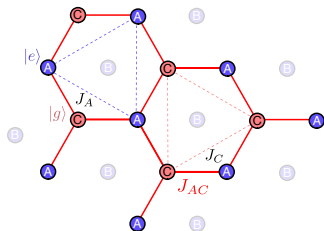
## Réseau total: primaire + aux.



## Réseau en nid d'abeille couplé par laser

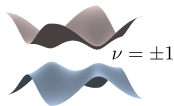
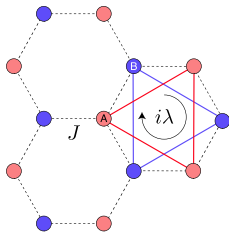


## Réseau en nid d'abeille couplé par laser

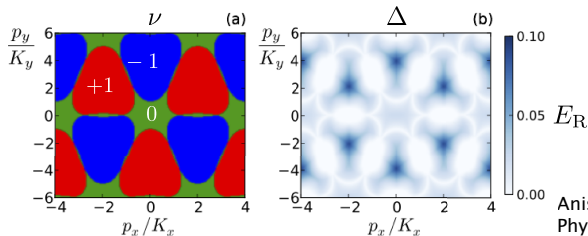


$$J_{AC}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = J \times e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2}$$

## Modèle de Haldane



## Des isolants de Chern accessibles (gap de l'ordre de 100Hz)

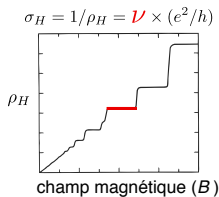
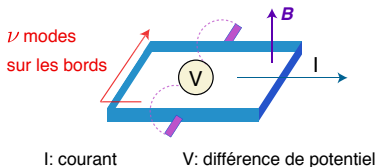


Anisimovas, Gerbier, Andrijauskas, N.G.  
Phys. Rev. A **89**, 013632 (2014)

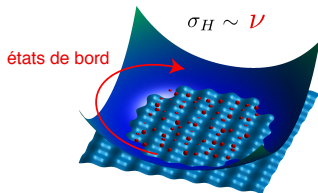
- 1 L'effet Hall quantique : Le nombre de Chern et les états de bord topologiques
  - La quantification de la conductivité de Hall
  - Le modèle de Haldane
  - Les états de bord topologiques
- 2 Implémentation du modèle de Haldane avec des atomes froids
  - Idée générale
  - Proposition spécifique
  - Comment sonder les phases topologiques ?
- 3 Comment sonder des états de bord topologiques dans un gaz atomique ?
  - Discussion générale
  - La spectroscopie
  - Imagerie directe
- 4 Mesure du nombre de Chern et le déplacement du centre de masse
  - Stratégie générale
  - Résultats numériques

# La question principale: comment identifier une phase topologique?

Physique de la matière condensée: "barre de Hall"

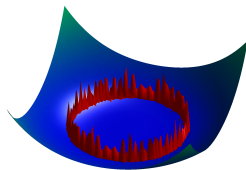


Système d'atomes froids topologique



Peut-on voir des états de bord?

Peut-on évaluer  $\nu$  ?



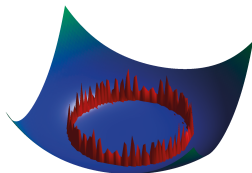
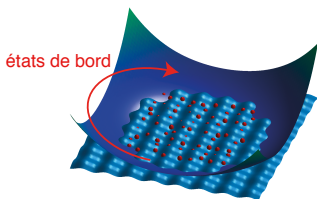


- 1 L'effet Hall quantique : Le nombre de Chern et les états de bord topologiques
  - La quantification de la conductivité de Hall
  - Le modèle de Haldane
  - Les états de bord topologiques
  
- 2 Implémentation du modèle de Haldane avec des atomes froids
  - Idée générale
  - Proposition spécifique
  - Comment sonder les phases topologiques ?
  
- 3 **Comment sonder des états de bord topologiques dans un gaz atomique ?**
  - Discussion générale**
  - La spectroscopie
  - Imagerie directe
  
- 4 Mesure du nombre de Chern et le déplacement du centre de masse
  - Stratégie générale
  - Résultats numériques

# Que se passe-t-il sur le bord?

Réseau optique à la Haldane

But: isoler et étudier les états de bord

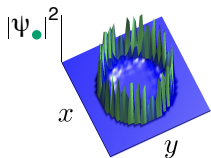
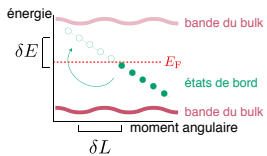


- Comment reconnaître des états de bord topologiques?
  - Ils sont chiraux ("*ils vont dans la même direction*")
  - Ils sont localisés sur le "bord"
  - Leur relation de dispersion est approx. linéaire:  $E \sim vk$
- Difficulté principale: il y a **peu d'états de bord, beaucoup d'états de bulk**
  - Typiquement:  $N=10.000$  atomes et approx. 10-100 états de bord
  - **Comment peut-on isoler le signal de ces quelques états de bord?**

- 1 L'effet Hall quantique : Le nombre de Chern et les états de bord topologiques
  - La quantification de la conductivité de Hall
  - Le modèle de Haldane
  - Les états de bord topologiques
- 2 Implémentation du modèle de Haldane avec des atomes froids
  - Idée générale
  - Proposition spécifique
  - Comment sonder les phases topologiques ?
- 3 **Comment sonder des états de bord topologiques dans un gaz atomique ?**
  - Discussion générale
  - La spectroscopie**
  - Imagerie directe
- 4 Mesure du nombre de Chern et le déplacement du centre de masse
  - Stratégie générale
  - Résultats numériques

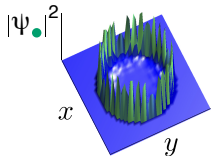
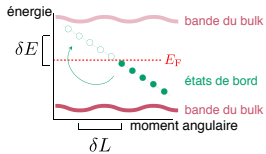
## Spectroscopie et états de bord atomiques

- Excitation autour du niveau de Fermi (i.e. dans le gap topologique)



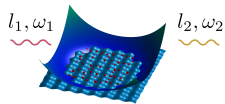
## Spectroscopie et états de bord atomiques

- Excitation autour du niveau de Fermi (i.e. dans le gap topologique)



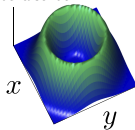
- La sonde: deux lasers Laguerre-Gauss

$$\mathcal{E}(r, \theta) = f(r)e^{i(l\theta - \omega t)}$$



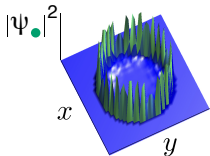
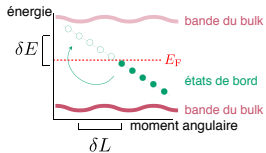
$$\delta\omega \approx \delta E/\hbar \quad \delta l \approx \delta L$$

forme de la sonde



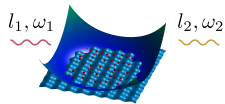
## Spectroscopie et états de bord atomiques

- Excitation autour du niveau de Fermi (i.e. dans le gap topologique)



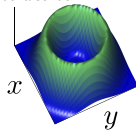
- La sonde: deux lasers Laguerre-Gauss

$$\mathcal{E}(r, \theta) = f(r)e^{i(l\theta - \omega t)}$$

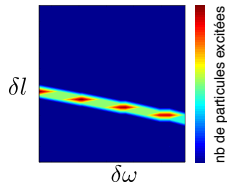
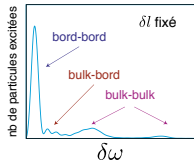


$$\delta\omega \approx \delta E/h \quad \delta l \approx \delta L$$

forme de la sonde

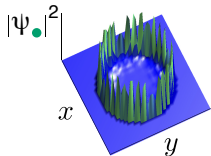
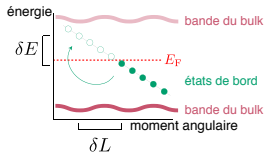


- Le spectre de Bragg: la relation de dispersion révélée



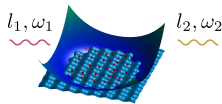
# Spectroscopie et états de bord atomiques

- Excitation autour du niveau de Fermi (i.e. dans le gap topologique)



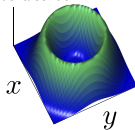
- La sonde: deux lasers Laguerre-Gauss

$$\mathcal{E}(r, \theta) = f(r)e^{i(l\theta - \omega t)}$$

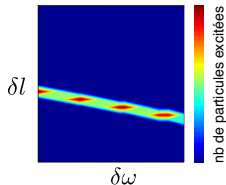
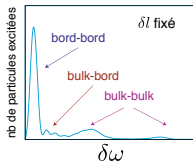


$$\delta\omega \approx \delta E/h \quad \delta l \approx \delta L$$

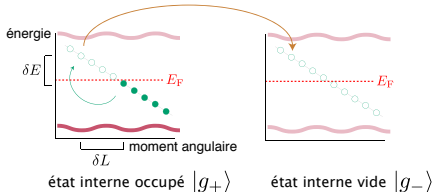
forme de la sonde



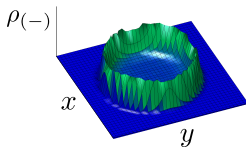
- Le spectre de Bragg: la relation de dispersion révélée



- Excite les atomes + change l'état interne



- Signal des états de bord sur fond noir (sans le signal bulk)

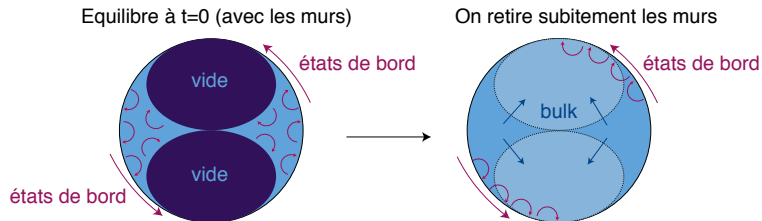
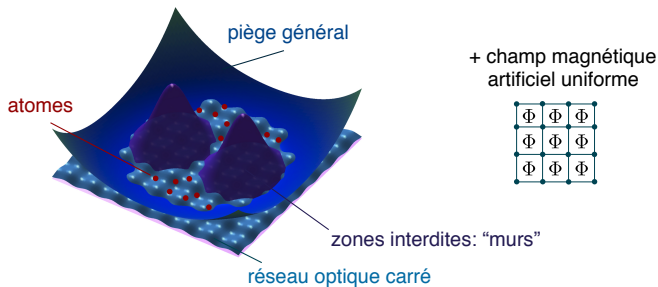


N.G., J. Beugnon and F. Gerbier  
PRL 2012

- 1 L'effet Hall quantique : Le nombre de Chern et les états de bord topologiques
  - La quantification de la conductivité de Hall
  - Le modèle de Haldane
  - Les états de bord topologiques
- 2 Implémentation du modèle de Haldane avec des atomes froids
  - Idée générale
  - Proposition spécifique
  - Comment sonder les phases topologiques ?
- 3 **Comment sonder des états de bord topologiques dans un gaz atomique ?**
  - Discussion générale
  - La spectroscopie
  - Imagerie directe**
- 4 Mesure du nombre de Chern et le déplacement du centre de masse
  - Stratégie générale
  - Résultats numériques

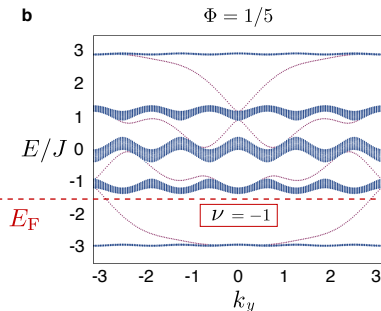
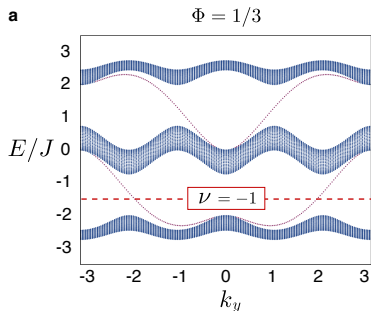
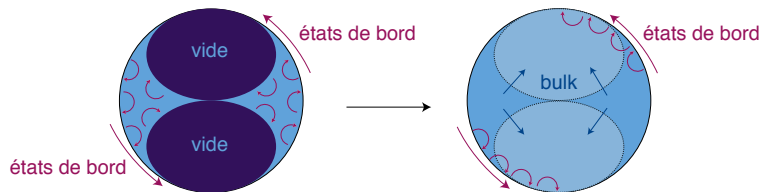


# Sonder les états de bord après un “quench”

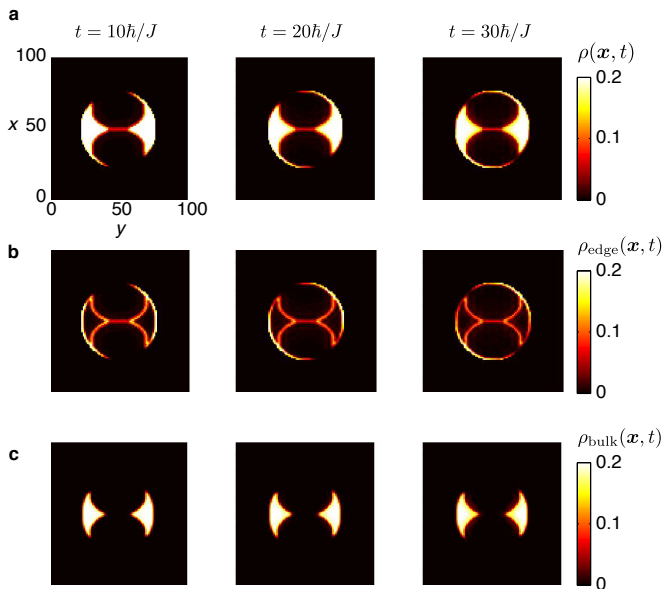


NG, J. Dalibard, A. Dauphin, F. Gerbier, M. Lewenstein, P. Zoller, and I. B. Spielman, PNAS 110, 6736 (2013)

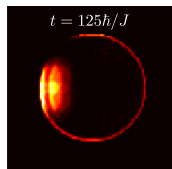
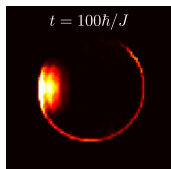
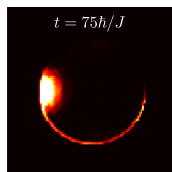
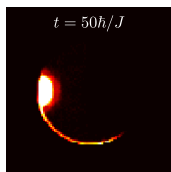
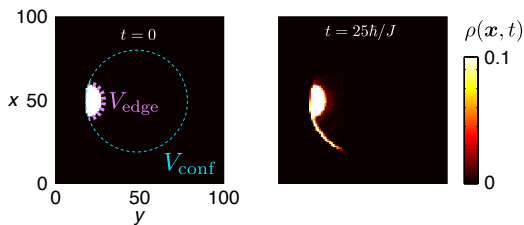
# Succès de la méthode : bandes plates vs bandes dispersives



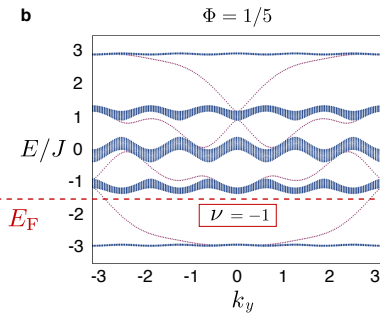
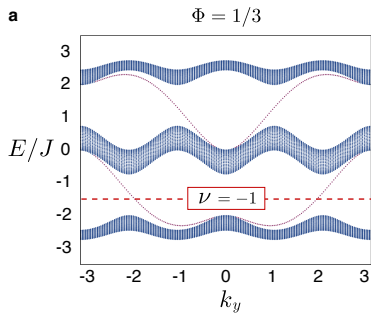
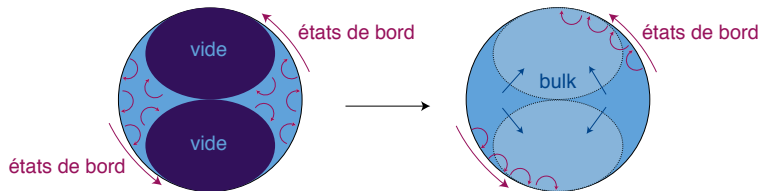
# Cas d'une bande plate topologique $\sim$ niveau de Landau



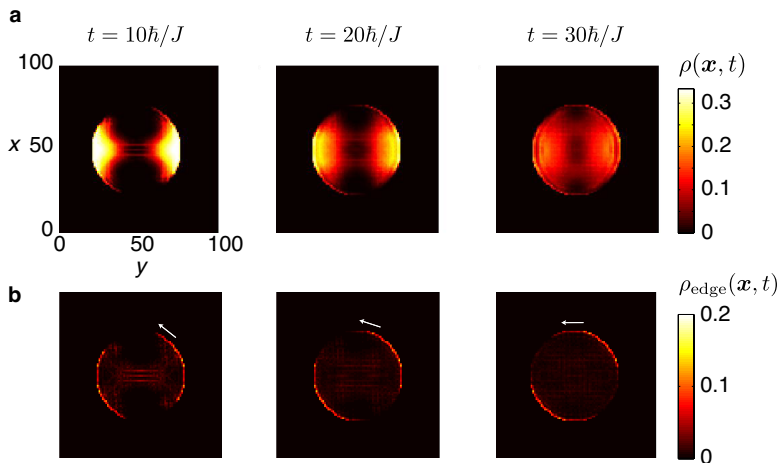
# Petite variante : propagation des états de bord sur une longue distance



# Succès de la méthode : bandes plates vs bandes dispersives

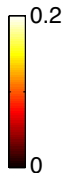
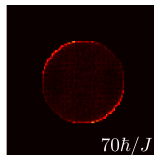
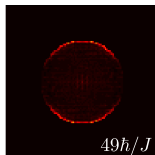
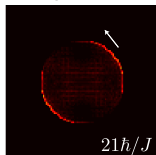


# Le cas (a priori problématique) des bandes dispersives

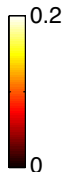
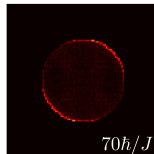
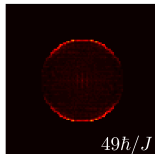
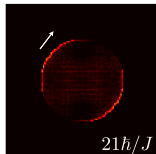


# Solution : méthode des flux opposés

**b**  $\rho_{\text{edge}}(\mathbf{x}, t; \Phi = +1/3)$

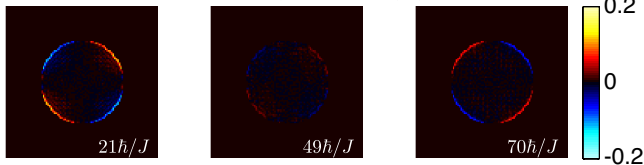


**c**  $\rho_{\text{edge}}(\mathbf{x}, t; \Phi = -1/3)$

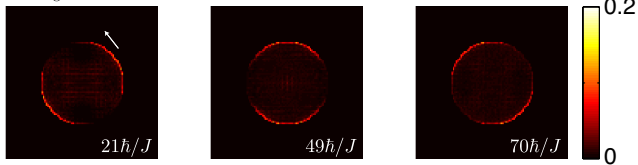


# Solution : méthode des flux opposés

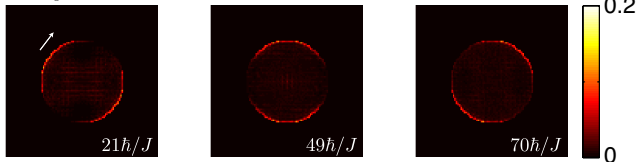
**a**  $\delta\rho = \rho(\mathbf{x}, t; \Phi = +1/3) - \rho(\mathbf{x}, t; \Phi = -1/3)$



**b**  $\rho_{\text{edge}}(\mathbf{x}, t; \Phi = +1/3)$



**c**  $\rho_{\text{edge}}(\mathbf{x}, t; \Phi = -1/3)$





- 1 L'effet Hall quantique : Le nombre de Chern et les états de bord topologiques
  - La quantification de la conductivité de Hall
  - Le modèle de Haldane
  - Les états de bord topologiques
- 2 Implémentation du modèle de Haldane avec des atomes froids
  - Idée générale
  - Proposition spécifique
  - Comment sonder les phases topologiques ?
- 3 Comment sonder des états de bord topologiques dans un gaz atomique ?
  - Discussion générale
  - La spectroscopie
  - Imagerie directe
- 4 **Mesure du nombre de Chern et le déplacement du centre de masse**
  - Stratégie générale**
  - Résultats numériques

## La vitesse “anormale” sur un réseau en présence d’un champ électrique

- La vitesse d’une particule dans un état  $|u_n(\mathbf{k})\rangle$  et soumise à un champ électrique  $\mathbf{E} = E_y \mathbf{1}_y$  est donnée par

$$v_x(\mathbf{k}) = v_{\text{band}}^x + v_{\mathcal{F}}^x = \frac{\partial E_n(\mathbf{k})}{\hbar \partial k_x} - \frac{i}{\hbar} E_y \mathcal{F}_{xy}^{(n)}(\mathbf{k}),$$

$$v_y(\mathbf{k}) = v_{\text{band}}^y = \frac{\partial E_n(\mathbf{k})}{\hbar \partial k_y} \quad \mathcal{F}_{xy}^{(n)} : \text{courbure de Berry (} n^{\text{ième}} \text{ bande)}$$

# La vitesse “anormale” sur un réseau en présence d’un champ électrique

- La vitesse d’une particule dans un état  $|u_n(\mathbf{k})\rangle$  et soumise à un champ électrique  $\mathbf{E} = E_y \mathbf{1}_y$  est donnée par

$$v_x(\mathbf{k}) = v_{\text{band}}^x + v_{\mathcal{F}}^x = \frac{\partial E_n(\mathbf{k})}{\hbar \partial k_x} - \frac{i}{\hbar} E_y \mathcal{F}_{xy}^{(n)}(\mathbf{k}),$$

$$v_y(\mathbf{k}) = v_{\text{band}}^y = \frac{\partial E_n(\mathbf{k})}{\hbar \partial k_y} \quad \mathcal{F}_{xy}^{(n)} : \text{courbure de Berry (} n^{\text{ième}} \text{ bande)}$$

- Price-Cooper (PRA 2012) : Il est possible d’extraire  $\mathcal{F}$  en regardant la dynamique
  - Préparer un paquet d’onde (suff. localisé en  $\mathbf{k}$ ) dans la bande  $n$  (e.g.  $n = 1$ )
  - Mesurer les vitesses moyennes  $v_x(\mathbf{k}_c; +E_y)$  and  $v_x(\mathbf{k}_c; -E_y)$
  - On prend la différence pour éliminer la vitesse de groupe  $v_{\text{band}}^x$

$$\mathcal{F}_{xy}(\mathbf{k}_c) = \frac{\hbar}{2iE_y} (v_x(\mathbf{k}_c; -E_y) - v_x(\mathbf{k}_c; E_y))$$

# La vitesse “anormale” sur un réseau en présence d’un champ électrique

- La vitesse d’une particule dans un état  $|u_n(\mathbf{k})\rangle$  et soumise à un champ électrique  $\mathbf{E} = E_y \mathbf{1}_y$  est donnée par

$$v_x(\mathbf{k}) = v_{\text{band}}^x + v_{\mathcal{F}}^x = \frac{\partial E_n(\mathbf{k})}{\hbar \partial k_x} - \frac{i}{\hbar} E_y \mathcal{F}_{xy}^{(n)}(\mathbf{k}),$$

$$v_y(\mathbf{k}) = v_{\text{band}}^y = \frac{\partial E_n(\mathbf{k})}{\hbar \partial k_y} \quad \mathcal{F}_{xy}^{(n)} : \text{courbure de Berry (} n^{\text{ième}} \text{ bande)}$$

- Price-Cooper (PRA 2012) : Il est possible d’extraire  $\mathcal{F}$  en regardant la dynamique
  - Préparer un paquet d’onde (suff. localisé en  $\mathbf{k}$ ) dans la bande  $n$  (e.g.  $n = 1$ )
  - Mesurer les vitesses moyennes  $v_x(\mathbf{k}_c; +E_y)$  and  $v_x(\mathbf{k}_c; -E_y)$
  - On prend la différence pour éliminer la vitesse de groupe  $v_{\text{band}}^x$

$$\mathcal{F}_{xy}(\mathbf{k}_c) = \frac{\hbar}{2iE_y} (v_x(\mathbf{k}_c; -E_y) - v_x(\mathbf{k}_c; E_y))$$

- Mesure du nombre de Chern ? Une somme astucieuse sur les trajectoires :

$$\nu_{\text{approx}} = \frac{i}{2\pi} \sum_{\mathbf{k}_c} \mathcal{F}_{xy}(\mathbf{k}_c) \Delta \mathbf{k}_c \longrightarrow \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{F}_{xy}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \nu$$

# La vitesse “anormale” sur un réseau en présence d’un champ électrique

- La vitesse d’une particule dans un état  $|u_n(\mathbf{k})\rangle$  et soumise à un champ électrique  $\mathbf{E} = E_y \mathbf{1}_y$  est donnée par

$$v_x(\mathbf{k}) = v_{\text{band}}^x + v_{\mathcal{F}}^x = \frac{\partial E_n(\mathbf{k})}{\hbar \partial k_x} - \frac{i}{\hbar} E_y \mathcal{F}_{xy}^{(n)}(\mathbf{k}),$$

$$v_y(\mathbf{k}) = v_{\text{band}}^y = \frac{\partial E_n(\mathbf{k})}{\hbar \partial k_y} \quad \mathcal{F}_{xy}^{(n)} : \text{courbure de Berry (} n^{\text{ième}} \text{ bande)}$$

- Price-Cooper (PRA 2012) : Il est possible d’extraire  $\mathcal{F}$  en regardant la dynamique
  - Préparer un paquet d’onde (suff. localisé en  $\mathbf{k}$ ) dans la bande  $n$  (e.g.  $n = 1$ )
  - Mesurer les vitesses moyennes  $v_x(\mathbf{k}_c; +E_y)$  and  $v_x(\mathbf{k}_c; -E_y)$
  - On prend la différence pour éliminer la vitesse de groupe  $v_{\text{band}}^x$

$$\mathcal{F}_{xy}(\mathbf{k}_c) = \frac{\hbar}{2iE_y} (v_x(\mathbf{k}_c; -E_y) - v_x(\mathbf{k}_c; E_y))$$

- Mesure du nombre de Chern ? Une somme astucieuse sur les trajectoires :

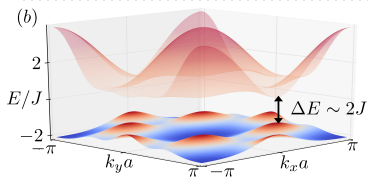
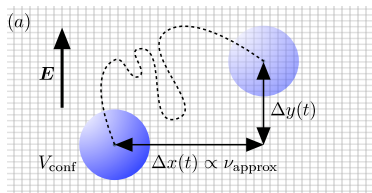
$$\nu_{\text{approx}} = \frac{i}{2\pi} \sum_{\mathbf{k}_c} \mathcal{F}_{xy}(\mathbf{k}_c) \Delta \mathbf{k}_c \longrightarrow \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{F}_{xy}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \nu$$

- On considère une stratégie différente pour éliminer la vitesse de bande : on **remplit** initialement une bande (avec des fermions)

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} v_x(\mathbf{k}) \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi^2} \int v_x(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \frac{iE_y}{4\pi^2 \hbar} \int \mathcal{F}_{xy}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \frac{E_y}{2\pi \hbar} \times \nu$$

# La stratégie générale

- On confine initialement le nuage  $V_{\text{conf}}(r) \sim (r/r_0)^\infty$  et on ajuste le niveau de Fermi  $E_F$  dans le gap, i.e. **on remplit la bande fondamentale**.



- Au temps  $t = 0$ , on retire  $V_{\text{conf}}(r)$  et on applique la force  $\mathbf{E} = E_y \mathbf{1}_y$  selon  $y$
- Pour  $E_y a \ll \Delta E$ , le centre de masse  $x(t)$  est décrit par les équations du mvt

$$x(t) = -(a^2 t E_y / \pi \hbar) \nu_{\text{approx}},$$

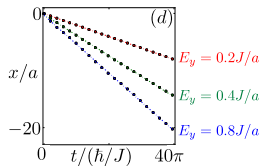
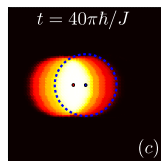
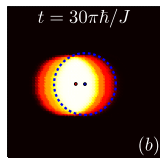
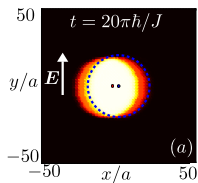
$$y(t) = 0,$$

où  $\nu_{\text{approx}} \approx \nu$  ( $\nu_{\text{approx}} \rightarrow \nu$  lorsque  $r_0 \rightarrow \infty$ )

- 1 L'effet Hall quantique : Le nombre de Chern et les états de bord topologiques
  - La quantification de la conductivité de Hall
  - Le modèle de Haldane
  - Les états de bord topologiques
  
- 2 Implémentation du modèle de Haldane avec des atomes froids
  - Idée générale
  - Proposition spécifique
  - Comment sonder les phases topologiques ?
  
- 3 Comment sonder des états de bord topologiques dans un gaz atomique ?
  - Discussion générale
  - La spectroscopie
  - Imagerie directe
  
- 4 **Mesure du nombre de Chern et le déplacement du centre de masse**
  - Stratégie générale
  - Résultats numériques**

# Mesure du nombre de Chern

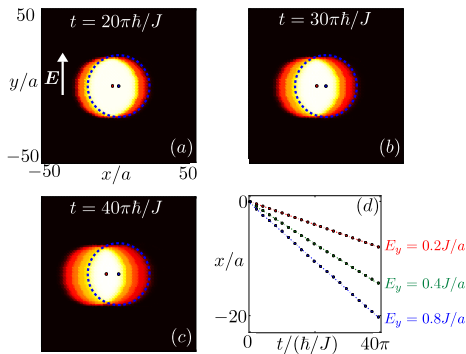
- Pour  $E_y = 0.2J/a$ , le déplacement  $|\mathbf{x}(t)| \approx 8a\mathbf{1}_x$  après un temps  $t = 40\pi\hbar/J$ .





# Mesure du nombre de Chern

- Pour  $E_y = 0.2J/a$ , le déplacement  $|x(t)| \approx 8a1_x$  après un temps  $t = 40\pi\hbar/J$ .



- Utilisant la prédiction théorique (basée sur l'approx. adiabatique)

$$x(t) = -(a^2 t E_y / \pi \hbar) \nu_{\text{approx}}$$

on évalue le nombre de Chern associé à la phase isolante de Chern (atomique)

$\nu_{\text{approx}} \simeq 1.00$  ( $E_y = 0.2J/a$ ) : l'approx. adiab. est **valide**

$\nu_{\text{approx}} \simeq 0.9$  ( $E_y = 0.4J/a$ ) : légère population de la bande supérieure

$\nu_{\text{approx}} \simeq 0.6$  ( $E_y = 0.8J/a$ ) : **population importante de la bande supérieure**

# Conclusions et sujets non abordés

- Il existe des méthodes pour **générer des phases topologiques (isolants de Chern) avec des atomes froids**

Ingrédient de base : champs de jauge artificiels (cf. cours de J. Dalibard)

- On a proposé des méthodes pour **identifier et étudier les états de bord topologiques**

Outils : spectroscopie, imagerie in-situ après un quench

- On a exploré une méthode permettant la **mesure du nombre de Chern associé à un isolant de Chern atomique**

Stratégie de base : Visualisation du déplacement du centre de masse

# Conclusions et sujets non abordés

- Il existe des méthodes pour **générer des phases topologiques (isolants de Chern) avec des atomes froids**

Ingrédient de base : champs de jauge artificiels (cf. cours de J. Dalibard)

- On a proposé des méthodes pour **identifier et étudier les états de bord topologiques**

Outils : spectroscopie, imagerie in-situ après un quench

- On a exploré une méthode permettant la **mesure du nombre de Chern associé à un isolant de Chern atomique**

Stratégie de base : Visualisation du déplacement du centre de masse

- On peut envisager **d'autres mesures**

Alba *et al.* PRL 2011, Abanin *et al.* PRL (2013), etc...

voir l'article de revue N.G., Juzeliūnas, Öhberg, Spielman, arXiv :1308.6533

- On peut envisager **d'autres phases topologiques**

- Isolants topologiques en présence de couplage spin-orbite (phases  $\mathbb{Z}_2$  à 2D ou 3D)

N.G. *et al.* PRL 2010 , Bermudez *et al.* PRL 2010, Béri and Cooper PRL 2011

- Suprafluides topologiques avec des atomes froids

Jiang *et al.* PRL 2011, Kraus *et al.* NJP 2012, Nascimbène JPB 2013

## References

*“Detecting chiral edge states in the Hofstadter optical lattice”*

N. G., J. Beugnon and F. Gerbier  
*Phys. Rev. Lett.* **108**, 255303 (2012)

*“Direct imaging of topological edges states in cold-atom systems”*

N. G., J. Dalibard, A. Dauphin, F. Gerbier, M. Lewenstein, P. Zoller, and I. B. Spielman  
*Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **110**, 6736 (2013)

*“Extracting the Chern number from the dynamics of a Fermi gas :  
Implementing a quantum Hall bar for cold atoms”*

A. Dauphin and N.G.  
*Phys. Rev. Lett.* **111**, 135302 (2013)

*“Measuring topology in a laser-coupled honeycomb lattice :  
from Chern insulators to topological semi-metals”*

N.G. E. Anisimovas, F. Gerbier, P. Öhberg, I.B. Spielman and G. Juzeliūnas  
*New J. Phys.* **15**, 013025 (2013)

*“Design of laser-coupled honeycomb optical lattices supporting Chern insulators”*

E. Anisimovas, F. Gerbier, T. Andrijauskas and N. G.  
*Phys. Rev. A* **89**, 013632 (2014)