Tutorat 5

Frédéric Chevy – chevy@lkb.ens.fr

Oscillations d'une corde de violon

1. Définir la hauteur, le timbre et le volume d'un son. Quand la superposition de deux notes jouées ensembles est elle harmonieuse ?
2. On considère le mouvement d'une corde de violon que l'on suppose de longueur 1. On rappelle que si la vitesse c de propagation d'une déformation de la corde est fixée à 1 alors l'amplitude $\epsilon(x,t)$ de la déformation en x à l'instant t satisfait l'équation d'onde
$$\Box\epsilon = \frac{\partial^2\epsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\epsilon}{\partial x^2} = 0.$$
   (a) Montrer que la solution générale de l'équation d'onde se met sous la forme
$$\epsilon(x,t) = f(x-t) + g(x+t).$$
   (b) On suppose la corde accrochée à ses extrémités $x=0$ et $x=1$. En déduire la relation liant f et g et montrer que f est périodique avec une période que l'on précisera.
3. Au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, Helmholtz a montré que sous l'effet du mouvement de l'archet, il se forme un "coin" en $x_0(t) \in [0,1]$ sur la corde et ϵ se met sous la forme :
$$\epsilon(x,t) = A(t)x\theta(x_0(t)-x) + B(t)(1-x)\theta(x-x_0(t)),$$
où A et B sont des fonctions du temps uniquement et θ est la fonction de Heavyside valant 0 pour $x<0$ et 1 sinon.
   (a) Montrer que la condition d'accrochage de la corde à ses extrémités est satisfaite par la forme proposée pour ϵ.
   (b) Dessiner l'allure de la corde à un instant t. En déduire la relation liant A, B et x_0.
   (c) Montrer que $\Box\epsilon$ se met sous la forme
$$\Box\epsilon = a(x,t)\theta(x_0-x) + b(x,t)\theta(x-x_0) + c(x,t)\delta(x-x_0) + d(x,t)\delta'(x-x_0),$$
   où a, b, c et d seront exprimés en fonction de x, A, B, x_0 et leurs dérivées.
   (d) Montrer que l'équation d'onde est satisfaite si et seulement si $a=b=c=d=0$.
   (e) Montrer que la condition $d=0$ est équivalente à $\dot{x}_0^2 = 1$. Montrer que par un choix judicieux de l'origine des temps on a $x_0 = t$.

(f) Montrer que la condition $a = b = 0$ revient à imposer $\ddot{A} = \ddot{B} = 0$. En déduire que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} A(t) &= \alpha t + \beta \\ B(t) &= \alpha' t + \beta', \end{aligned}$$

où α, α', β et β' sont trois constantes.

(g) À l'aide de la relation liant A, B et x_0 trouvée à la question (3b), donner l'expression de α', β et β' en fonction de α.

(h) On note $\epsilon_0(t) = \epsilon(x_0(t), t)$ l'amplitude maximale de la déformation. Donner l'évolution temporelle de $\epsilon_0(t)$ en fonction de α et du temps.

(i) Décrire à l'aide des questions précédents l'allure qualitative du mouvement de la corde.

(j) On suppose l'archet posé en $x = x_a$. Décrire qualitativement l'évolution de $\epsilon(x_a, t)$ et en déduire un mécanisme d'entraînement de la corde par l'archet.