

# TUTORAT 2

## DEUX THÉORÈMES DU POINT FIXE

Frédéric Chevy – chevy@lkb.ens.fr

### 1 Théorème du point fixe de Brouwer en dimension 2

1. Lire l'article ci-joint.
2. Soient deux domaines  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  convexes, fermés et bornés de  $\mathbb{R}^2$ . Construire un homéomorphisme (application bijective, continue et de réciproque continue) de  $\mathcal{D}$  sur  $\mathcal{D}'$  (Une construction géométrique suffira).
3. En déduire que si l'on montre le théorème du point fixe pour le disque unité, on le montre pour tout domaine convexe.
4. On rappelle qu'un lacet est une application  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $f(0) = f(1)$ . On dit que deux lacets  $f_1$  et  $f_2$  sont homotopes si l'on peut passer continument de l'un à l'autre, autrement dit s'il existe  $u : [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  continue et vérifiant pour tout  $(x,t) \in [0,1] \times [0,1]$

$$\begin{cases} u(x,0) = u(x,1), \\ u(0,t) = f_1(t), \\ u(1,t) = f_2(t). \end{cases}$$

Un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  est *simplement connexe* si tous les lacets de  $\mathcal{D}$  sont homotopes à un point.

- (a) Discuter sans démonstration la simple connexité des domaines suivants : le plan, le plan privé d'un point, le disque unité, le cercle unité.
  - (b) Soit  $\mathcal{D}$  le disque et  $\mathcal{C}$  le cercle unités. On suppose qu'il existe  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  continue et sans point fixe. À tout point  $x$  de  $\mathcal{D}$  on fait correspondre  $\phi(x)$ , intersection de  $\mathcal{C}$  et de la demi-droite d'extrémité  $f(x)$  passant par  $x$  (Fig. 1). Montrer que  $\phi$  est ainsi bien définie et que pour tout  $x \in \mathcal{C}$ ,  $(\phi(x) = x)$ .
  - (c) On considère  $\mathcal{C}$  comme un lacet de  $\mathcal{D}$ . Montrer que  $\mathcal{C}$  est homotope à un point. On note alors  $u : [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathcal{D}$  la transformation d'homotopie correspondante.
  - (d) En considérant l'application  $\phi \circ u$ , montrer que  $\mathcal{C}$  est homotope à un point dans  $\mathcal{C}$ . Conclusion.
5. *Question subsidiaire* : Proposer une démonstration du théorème "écologique" de la fin de l'article.

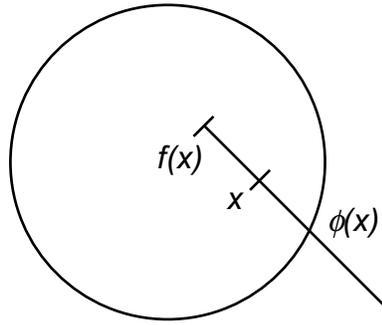


FIG. 1

## 2 Théorème du point fixe de Banach

### 2.1 Rappel sur les espaces vectoriels normés

1. Soit un espace vectoriel  $\mathcal{E}$ .  $\|\cdot\|$  définit une norme sur  $\mathcal{E}$  si elle satisfait les deux axiomes suivants :

- (a)  $\forall x \in \mathcal{E}, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ;
- (b)  $\forall (x,y) \in \mathcal{E}^2, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

2. Soit  $u$  une suite d'éléments de  $\mathcal{E}$ .  $u$  est une suite de *Cauchy* si elle satisfait la condition suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \text{ tq } \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p > N \Rightarrow \|u_p, u_{p+q}\| < \epsilon.$$

3.  $\mathcal{E}$  est dit complet si toutes les suites de Cauchy sont convergentes (on dit aussi que  $\mathcal{E}$  est un *espace de Banach*).

### 2.2 Théorème du point fixe de Banach

Soit  $\mathcal{E}$  un espace de Banach. On dit que l'application  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  est  $k$ -contractante s'il existe  $k \in ]0,1[$  tel que pour tout couple  $(x,y)$  d'éléments de  $\mathcal{E}$  on a :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

On désire montrer dans ce préliminaire que toute application  $f$   $k$ -contractante admet un unique point fixe  $x_0$  vérifiant  $f(x_0) = x_0$ .

1. Montrer que si  $x_0$  existe, alors il est unique.
2. On considère la suite  $u$  d'éléments de  $\mathcal{E}$  définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & a \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \quad n \geq 1, \end{cases}$$

où  $a$  est un élément quelconque de  $\mathcal{E}$ .

- (a) Montrer que  $f$  est continue. En déduire que si  $u$  converge alors sa limite est un point fixe de  $f$ .

- (b) Montrer que pour tout entier  $n$ ,  $\|u_n - u_{n+1}\| < k^n \|u_0 - u_1\|$ . En déduire que pour tout couple  $(p, q)$  d'entiers strictement positifs, on a

$$\|u_p - u_{p+q}\| \leq \|u_0 - u_1\| \frac{k^p}{1 - k}$$

puis que  $u$  est une suite convergente.

3. Déduire des questions précédentes qu'une application  $k$ -contractante possède un unique point fixe.

## 2.3 Application aux équations différentielles

1. *Question préliminaire.* Soit  $\mathcal{E}$  un espace de Banach et  $I = [a, b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On considère  $\mathcal{F} = \mathcal{C}^0(I, \mathcal{E})$ , l'ensemble des fonctions continues sur  $I$  à valeurs dans  $\mathcal{E}$ . On dote  $\mathcal{F}$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} \|f(t)\|$$

et l'on souhaite montrer que pour cette norme,  $\mathcal{F}$  est un espace de Banach.

- (a) Soit  $f_n$  une suite de Cauchy d'éléments de  $\mathcal{F}$ . Montrer que pour tout  $t \in I$ ,  $f_n(t)$  est de Cauchy. En déduire que la suite de fonction  $f_n$  converge simplement vers une fonction  $f$ .
- (b) En passant à la limite dans le critère de Cauchy, montrer que  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n > N$  et pour tout  $t \in I$ ,  $\|f_n(t) - f(t)\| < \epsilon$ .
- (c) En déduire que  $f$  est continue et que  $f_n$  converge dans  $\mathcal{F}$ . Conclure.
2. *Application au théorème de Cauchy.* Soit  $J = [-\alpha, \alpha]$ . On considère  $F : \mathcal{E} \times J \rightarrow \mathcal{E}$  pour laquelle il existe  $\lambda > 0$  tel que  $\forall (x, y, t) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times J$ ,

$$\|F(y, t) - F(x, t)\| < \lambda \|x - y\|.$$

Soit  $\tau < \alpha$  un réel positif, on définit  $I_\tau = [-\tau, \tau]$  et on note  $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{C}^0(I_\tau, \mathcal{E})$ . On définit alors  $H : \mathcal{F}_\tau \rightarrow \mathcal{F}_\tau$  par :

$$\forall (g, t) \in \mathcal{F}_\tau \times I_\tau, H(g)(t) = \int_0^t F(g(t'), t') dt'.$$

- (a) Montrer que si  $\tau$  est suffisamment petit, alors  $H$  est contractante. En déduire que  $H$  possède un point fixe  $g_0$ .
- (b) Montrer que  $g_0$  est solution d'une équation différentielle que l'on précisera. Conclure.

# Le théorème des indéboulonnables

JEAN MAWHIN

*Les variantes d'un même théorème, le théorème du point fixe, expliquent l'immobilité de certains points, pourquoi les équations de la physique ont des solutions, et pourquoi le prix Nobel d'économie a été décerné à John Nash en 1994.*

Le mathématicien, c'est bien connu, transforme le café en théorème. Lorsqu'il tourne consciencieusement sa cuillère dans sa tasse de café, il sait qu'on a démontré un théorème de topologie assurant, qu'à la fin de l'opération un point (au moins) du café aura repris la place qu'il occupait au départ. Bien entendu, le café n'est pas en cause : le même résultat vaut pour un pot de colle ou de peinture. Le même théorème affirme que si vous froissez une feuille de papier et l'écrasez telle quelle sur une autre feuille mise à plat, l'un des points de la feuille froissée se superpose au même point de la feuille à plat. Ce point n'a pas bougé au terme du froissage. Dans les deux cas – le café et les feuilles de papier –, l'immobilité d'au moins un point est systématique. Que vous tourniez la cuillère à café durant des heures et que vous pliez la feuille en 1000 n'y changera rien, un point résistera toujours à votre acharnement.

Le théorème qui garantit l'existence de ce point immobile est le théorème du point fixe. Son père officiel est le mathématicien hollandais Luitzen Brouwer (1881-1966), mais plusieurs noms devraient en réalité figurer sur son certificat de naissance. Il a été en effet énoncé et démontré plusieurs fois sous des formes variées, et à différents moments entre la fin du XIX<sup>e</sup> siècle et la moitié du XX<sup>e</sup> siècle. La raison de ces multiples renaissances est – hormis le fait que la culture d'un mathématicien ne peut embrasser l'intégralité des travaux de ses confrères – que son intérêt dépasse de loin le cadre purement géométrique. Grâce au théorème du point fixe, on démontre qu'il est pertinent de dénombrer les dimensions de l'espace, que les équations de la physique ont des solutions, que nous pouvons coopérer pour le bien de tous... Le théorème du point fixe a aujourd'hui près de 100 ans, mais il ne fait pas son âge : que vous étudiez les fractales, les cours de la bourse, ou vérifiez un compteur électrique, vous rencontrerez partout des points fixes sur votre chemin.

## La dimension du problème

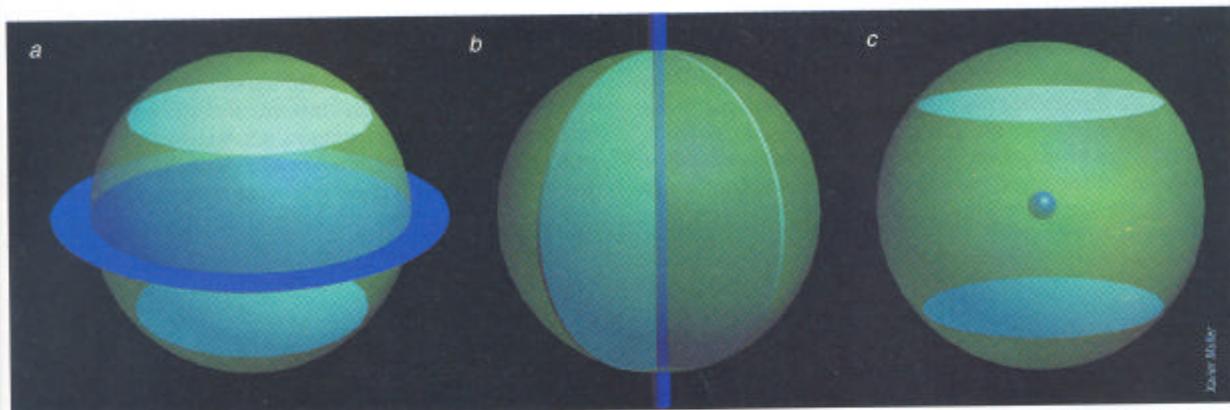
Vers 1910, Brouwer cherchait à résoudre un problème fondamental dû à Georg Cantor, en 1878, qui était parvenu à construire une bijection (une transformation possédant

un inverse) entre un plan et une droite. Cette bijection consiste (en tenant compte de quelques précautions pour les suites infinies de 9) à représenter un point du plan de coordonnées 0,8652147 et 1,5462257, par le point 1,85647652221547, où les décimales des coordonnées du point du plan sont intercalées pour donner une seule coordonnée sur une droite. Le passage de la droite au plan est aussi possible et cette relation entre ces deux ensembles de points remettait en question la notion même de dimension d'espace : pourquoi considérer comme différents deux objets mathématiques si l'on peut transformer l'un en l'autre ?

On réalisa toutefois que la bijection de Cantor n'est

**1. LA TRANSFORMATION** passant de l'image générale à celle plus petite sur une boucle d'oreille est une contraction. Ce type de transformation possède un unique point fixe. Après un nombre infini d'itérations de la contraction, l'ensemble des points de l'image géométrique se superposent à ce point fixe (situé dans la boucle d'oreille de droite réduite à un point désigné par une flèche rouge).





2. TROIS TRANSFORMATIONS qui possèdent des points fixes. Toutes transforment le volume interne d'une sphère en un autre inclus dans le précédent. La première (a) est une symétrie par rapport à un plan équatorial de la sphère (en bleu). Cette application transforme un disque (en vert clair) en un autre disque. Tous

les points du plan de symétrie sont des points fixes. La deuxième transformation (b) est une rotation dont l'axe est un diamètre de la sphère. Les points de l'axe de rotation constituent des points fixes. Enfin, la symétrie centrale par rapport au centre de la sphère possède un unique point fixe : le centre lui-même.

pas continue, c'est-à-dire que la transformation disperse les points : l'image de points accolés sur la droite est un ensemble de points éparpillés dans le plan. Or les transformations qu'affectionnent les mathématiciens sont continues, car la plupart des lois de la nature le sont, ensuite

parce que les transformations non continues sont des objets mathématiques inconsistants dont il est difficile de trouver des propriétés générales.

Le caractère non continu de la bijection de Cantor rassura donc les mathématiciens sur le bien-fondé de la distinction entre espaces de dimensions différentes. La question demeurerait pourtant : la bijection de Cantor n'est pas continue, mais peut-être en existe-t-il une autre, continue celle-ci, entre une droite et un plan, ou, plus généralement, entre deux espaces euclidiens de dimensions différentes? Pour prouver qu'une telle possibilité n'existe pas, Brouwer introduisit des techniques nouvelles qui allaient bouleverser la topologie, notamment, à la fin de son article, un théorème de point fixe.

## Un point immobile par une application

Un point fixe d'une transformation est un point qui reste inchangé lors de la transformation, un point dont l'image coïncide avec lui-même. Pour nous familiariser avec ce concept, imaginons un ensemble de points de l'espace constituant une boule, et décrivons les points fixes de quelques applications simples qui transforment la boule en elle-même (voir la figure 2), les transformations qui, à chaque point de la boule, associent le symétrique par rapport à une section équatoriale, une rotation autour d'un axe passant par le centre de la boule, et la symétrie par rapport au centre.

Toutes les applications de la boule dans elle-même n'ont bien entendu pas nécessairement de point fixe. Reprenons la symétrie par rapport au centre de l'exemple précédent, mais modifions-la de façon à envoyer le centre de la boule ailleurs que sur lui-même : la transformation perd son unique point fixe. Cependant, cette transformation n'est pas continue au voisinage du centre de la boule. La notion de continuité trace une frontière entre les transformations qui ont *toujours* des points fixes et celles qui n'en ont pas toujours : le théorème du point fixe de Brouwer affirme que toute application continue d'une boule dans la même boule possède au moins un point fixe. Si nous déplaçons tous les points d'une boule sans en sortir, de telle sorte que des points voisins restent voisins après le déplacement, un point au moins n'est pas déplacé.

À l'énoncé du théorème du point fixe, la question des dimensions de l'espace soulevée par Cantor paraît lointaine. Pour Brouwer, le lien entre la résolution du problème de la dimension et son théorème de point fixe était ténu, et pourtant ce lien direct existait bel et bien. Ainsi Wladyslaw Kulpa et Marian Turzansky ont prouvé avec le théorème de Brouwer, en 1988, l'invariance de la dimension pour une transformation continue.

Le théorème du point fixe affirme qu'il existe au moins un point fixe, mais combien y en a-t-il exactement? Dans quel cas n'y en a-t-il qu'un seul? Depuis longtemps, les mathématiciens ont cherché, consciemment ou non, quelles propriétés de la transformation et de



l'ensemble sur lequel on applique la transformation assurent l'unicité d'un point fixe.

## Le point fixe des lavages

L'un de leurs plus anciens résultats concerne les contractions d'un ensemble dans lequel on sait mesurer la distance entre deux points (un espace métrique). Une contraction d'un ensemble en lui-même est une transformation qui, pour tous les couples de points, réduit la distance qui les sépare d'un même facteur (en fait «au moins» d'un même facteur, car les contractions ne sont pas nécessairement des homothéties). Si l'on en croit les publicités télévisées, un lavage en machine à laver avec une poudre ordinaire est une contraction : un T-shirt rétrécit dans toutes les dimensions, comme si on le transformait en une taille plus petite. Dans le cas où cette poudre sévit de la sorte à chaque lavage, le T-shirt ne cesse de rétrécir. En superposant les résultats des lavages successifs, on voit qu'ils se rapprochent indéfiniment d'un point, le point fixe de la contraction induite par le lavage. Similairement l'application itérée transformant l'étiquette de la *Vache qui rit* en une de ses boucles d'oreille donne un point fixe.

Cet exemple illustre une règle tout à fait générale : toute contraction d'un espace métrique sur lui-même a un unique point fixe. Pour l'obtenir, on procède comme lors d'un lavage : on part d'un point quelconque de l'ensemble (un point du T-shirt), et l'on calcule les valeurs de ses itérations par la contraction. La suite de points obtenue se rapproche indéfiniment du point fixe ; on en calcule ainsi une approximation aussi précise que l'on veut. En réalité, pour que le succès soit garanti, il faut encore que l'espace métrique soit complet, mais ceci est le cas pour bon nombre d'entre eux. Un espace est complet lorsque toute suite dont les éléments se rapprochent infiniment les uns des autres converge vers un point appartenant à l'ensemble. L'ensemble des rationnels en est un contre-exemple : la suite formée des approximations rationnelles et successives de  $\sqrt{2}$  ( $1$  ;  $1,4 = 7/5$  ;  $1,41 = 141/100$  ; ...) ne converge pas vers un rationnel.

L'opération d'itération est illustrée sur une calculatrice par la fonction cosinus. La fonction cosinus n'est pas une contraction, mais, comme les contractions, elle possède un unique point fixe. Elle transforme l'ensemble des réels en l'ensemble des réels compris entre  $-1$  et  $+1$ . Sur une calculatrice, en pressant de manière répétée la touche *cos* à partir d'une valeur numérique quelconque  $a$ , on obtient une série de valeurs ( $\cos(a)$ ,  $\cos(\cos(a))$ ,  $\cos(\cos(\cos(a)))$ , ...) qui se rapprochent de  $0,739085133$ . Ce nombre est l'approximation à dix décimales du point fixe de la transformation *cosinus*, solution de l'équation  $x = \cos x$ , pour laquelle il serait vain de chercher une formule explicite.

Le fait que les itérations successives d'un point quelconque par la contraction convergent vers l'unique point fixe de la contraction porte le nom de théorème du point fixe de Banach, en l'honneur du mathématicien polonais Stefan Banach qui en a donné une première version abstraite en 1922. Stefan Banach marchait sur les traces du mathématicien français Émile Picard, qui, à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, avait utilisé la méthode des approximations successives pour résoudre de nombreux problèmes s'exprimant en termes d'équations différentielles, intégrales, ou aux dérivées partielles. La plupart des modèles mathé-

matiques de phénomènes naturels ou même humains conduisent à de telles équations. Le théorème de Banach s'est plus récemment révélé être un outil fondamental dans l'étude des ensembles fractals, qui s'obtiennent en itérant indéfiniment des constructions géométriques simples. En effet, grâce au théorème du point fixe de Banach, Hutchinson a démontré en 1981 que certaines courbes fractales correspondent à des contractions. Prenons par exemple l'ensemble fractal de Cantor, obtenu en divisant en trois parties égales un segment, puis en retirant le bout du milieu, en réitérant l'opération sur les deux bouts restants et ainsi de suite indéfiniment :



Considérons la transformation qui associe à toute union de segments disjoints, l'union du tiers de gauche et du tiers de droite de chacun d'entre eux. C'est une contraction dans un espace métrique approprié. Le point fixe unique de cette transformation sur le segment unité constitue l'ensemble de Cantor. Le théorème de Hutchinson a éclairé d'un jour nouveau certaines fractales connues et a permis d'en construire de nouvelles.

Le théorème du point fixe de Banach s'applique à des contractions d'ensembles très généraux (il n'y a pas de restriction sur leur forme), mais la condition de contraction est restrictive. Elle n'est satisfaite par exemple pour aucune des transformations de la boule considérées en début d'article, puisque ces transformations conservent les distances. Elle ne l'est pas non plus dans la rotation d'un disque ou d'un anneau autour de son centre, qui a un point fixe dans le premier cas et n'en a pas dans le second. Pour obtenir un théorème de point fixe pour des transformations plus générales que les contractions, on est obligé d'imposer des hypothèses plus restrictives sur l'ensemble transformé, des conditions topologiques qui, par exemple, distinguent un disque d'un anneau. En fait, c'est la présence d'un trou dans l'anneau qui peut faire obstacle à l'existence d'un point fixe.

## Une idée de la preuve en dimension un

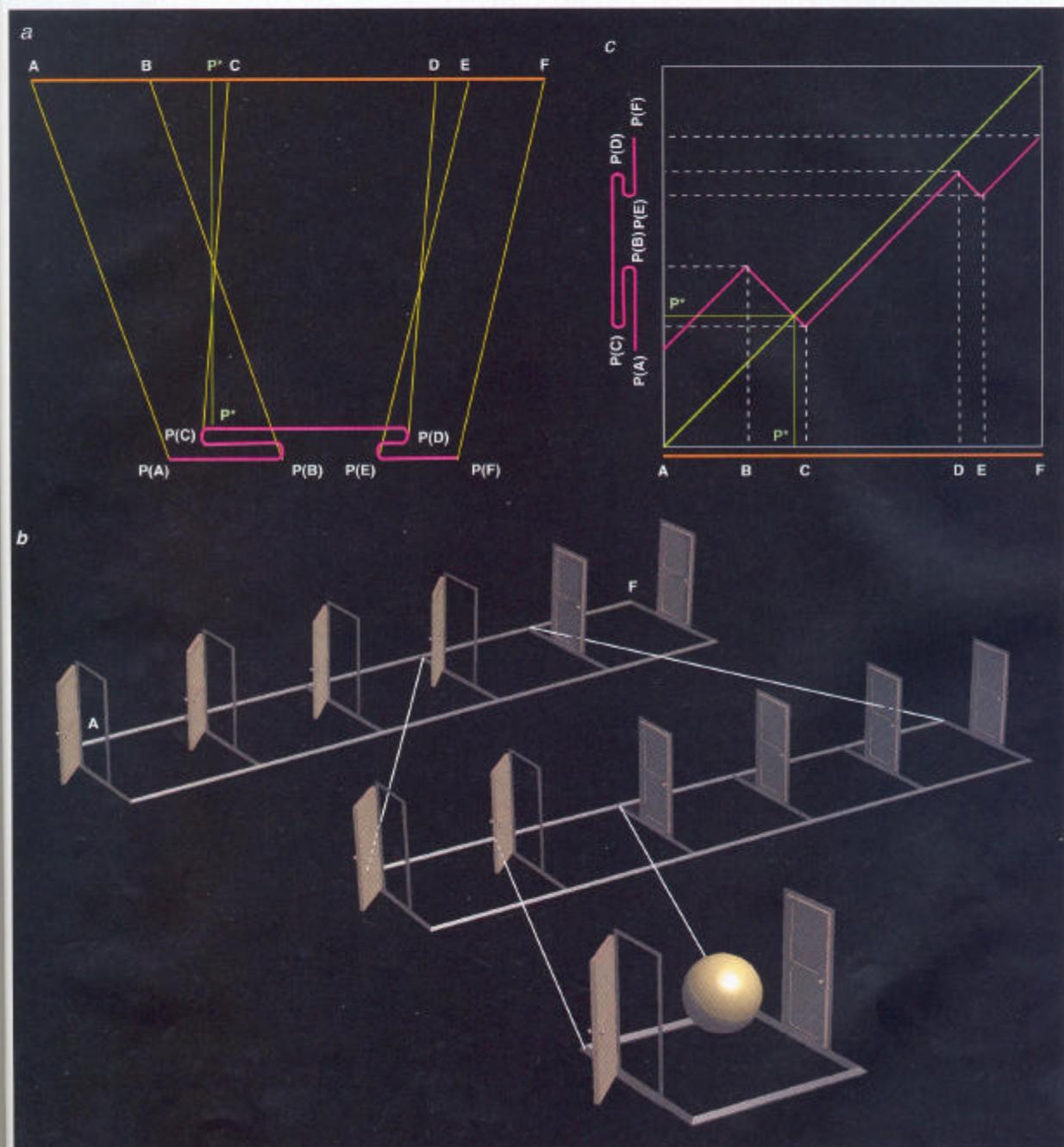
En dimension un, on peut représenter par un graphe toute transformation continue  $P$  d'une ficelle de longueur  $AB$  vers la même longueur repliée (voir la figure 3). Ce graphe est constitué des points du plan de coordonnées  $(M, P(M))$ . Puisqu'ils sont les solutions de l'équation  $P(M) = M$ , les points fixes correspondent à l'intersection du graphe et de la première bissectrice passant par l'origine du repère cartésien et inclinée à 45 degrés par rapport à l'horizontale. Comme l'origine du graphe est au-dessus du point correspondant de la diagonale, et que son extrémité est en dessous, on pressent que la courbe doit croiser au moins une fois cette droite.

En termes bucoliques, on ne passe pas, sans sauter, d'une berge à l'autre d'une rivière sans se mouiller les pieds. Rigoureusement, il s'agit d'une conséquence évidente du théorème des valeurs intermédiaires, démontré pour la première fois, dans le premier quart du XIX<sup>e</sup> siècle, par le Tchèque Bernard Bolzano et le Français Augustin Cauchy. Ce théorème affirme qu'une fonction continue d'une variable réelle qui prend des signes opposés en deux valeurs  $a$  et  $b$ ,

$a$  étant inférieur à  $b$ , s'annule au moins une fois entre  $a$  et  $b$ . Le cas envisagé ici est, à une dimension, le correspondant du théorème de la «feuille froissée» à deux dimensions.

On peut esquisser une démonstration directe du théorème de Brouwer en dimension un en orientant le segment  $AB$  de la gauche vers la droite, en le divisant en segments d'égale longueur, et en imaginant que ces seg-

ments représentent des pièces. Le segment  $AB$  est donc semblable à une enfilade de salles traversées par un long couloir. La porte de ces pièces est ouverte ou fermée selon l'image de l'extrémité gauche des segments : ouverte si la transformation envoie le point vers la droite, fermée si le point est envoyé vers la gauche (voir la figure 3). Le décor planté, avançons dans le couloir à partir du point  $A$ .



3. DÉMONSTRATION IMAGÉE DU THÉORÈME DU POINT FIXE d'une contraction continue envoyant une ficelle de longueur  $AF$  (en orange) sur la même ficelle repliée (en rouge), c'est-à-dire le segment  $AF$  sur lui-même (a). On décompose (b) le segment  $AF$  en petits segments de plus petite longueur, et on imagine que pour passer d'un petit segment à un autre, il faille franchir une porte. La porte est ouverte si l'image d'un point se trouve à sa droite, et fermée si l'image est à sa gauche. On parcourt ensuite par la pensée ce couloir à par-

tir du point  $A$ . L'enfilade de portes ouvertes mène nécessairement à une pièce close (au plus tard, la pièce close est celle en  $F$ ). On divise alors à nouveau cette pièce close en plusieurs pièces et l'on reprend le chemin amenant à une porte close. En répétant ces opérations, on converge vers un point particulier de la pièce close : un des points fixes de la transformation (sphère jaune). En traçant le graphe de la transformation (c, en rouge), on identifie le point fixe  $P^*$  à l'intersection de la courbe avec la droite  $y = x$  (en vert).

## Le « jeu de Sperner »

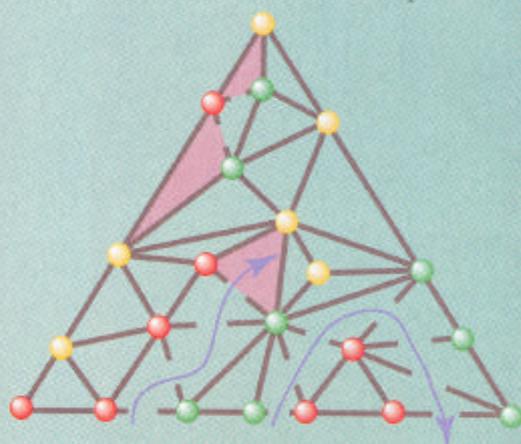
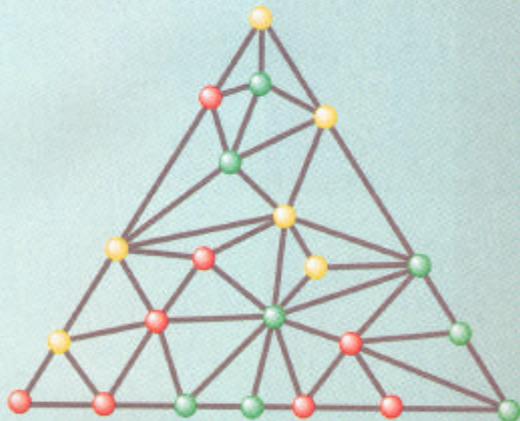
Le jeu de Sperner se joue à deux, sur un plateau triangulaire. Sur le plateau sont marqués des points où l'on dépose des pions de trois couleurs différentes. La partie commence après que l'on a mis un pion de chacune des trois couleurs à chaque sommet du plateau. Les joueurs placent alors à tour de rôle un pion de la couleur désirée. Le but du jeu est de terminer un petit triangle de pions dont les sommets sont de trois couleurs différentes. Une seule restriction concerne le type de pions que l'on peut placer sur les côtés du plateau : on ne peut y mettre que des pions de la même couleur que celles des sommets de ce côté. Le premier joueur gagne s'il construit un triangle tricolore, le second joueur gagne s'il l'en empêche.

Un conseil : jouer le premier, vous gagnerez à tous les coups ! Le lemme de Sperner assure en effet que, quelle que soit la répartition des pions sur le plateau, au moins l'un des petits triangles possède des sommets de couleurs distinctes. Ce lemme est le point de départ d'une des démonstrations du théorème du point fixe à deux dimensions.

Pour démontrer ce lemme, imaginons que le plateau de jeu représente le plan d'une maison, et les petits triangles les pièces de cette maison. Les portes de cette maison sont les segments dont l'une des extrémités est

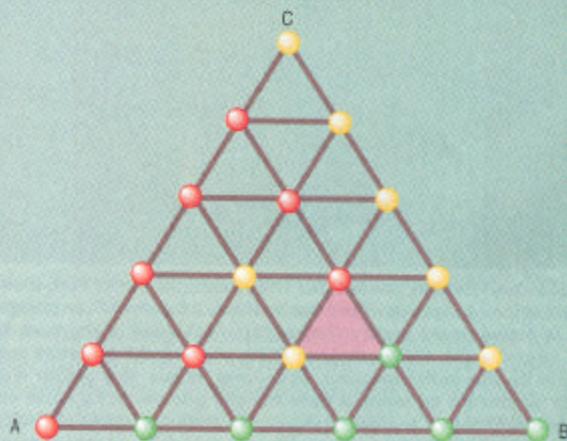
verte et l'autre rouge. Cette règle situe les portes d'entrées de la maison sur une seule des façades, celle allant du point vert au point rouge de la maison. Le nombre de portes d'entrée est égal au nombre de changements de couleur sur cette façade. Or, sur chaque façade, le nombre de changements de couleur est impair, donc le nombre de portes l'est aussi.

Entamons maintenant une visite de la maison : pénétrons par l'une des portes d'entrée, nous nous retrouvons dans la première pièce. Deux éventualités se présentent : deux murs se dressent, car la pièce est tricolore, ou la pièce comporte un mur et une porte. Dans le second cas, en franchissant la porte, nous nous retrouvons dans une nouvelle salle qui peut être tricolore ou ouverte, et ainsi de suite... La visite nous mène donc soit à une salle fermée, tricolore, soit à une des portes d'entrée. Or, les portes d'entrée sont en nombre impair. Par conséquent, au moins l'une d'entre elles débouche sur une salle tricolore (deux entrées ne peuvent mener à une même sortie, car la façon de colorer interdit les embranchements de chemins : un triangle ne peut avoir trois portes). On ignore *a priori* combien il existe de triangles tricolores, mais en prolongeant ce raisonnement, on montre qu'il en existe toujours un nombre impair.



## Une idée de la preuve en dimension deux

L'une des preuves du théorème du point fixe consiste à décomposer un triangle ABC en une myriade de triangles élémentaires selon les règles de coloriage indiquées dans le jeu de Sperner. On a une transformation continue dont la règle n'est pas détaillée ici qui envoie chaque point intérieur au triangle en un autre point. Nous voulons démontrer que cette transformation a un point fixe. On associe une couleur parmi les trois initiales au déplacement de chaque point. On démontre que chaque transformation, comme dans le jeu de Sperner, donne naissance à un triangle tricolore. Appliquée à l'infini, on arrive donc à un triangle infiniment petit tricolore qui est le point fixe. En effet, ce point qui reçoit trois injonctions de déplacement différentes ne « bouge » pas lors de toutes les transformations.



Nous pénétrons dans une série de salles ouvertes, puis rencontrons la première porte fermée. Cette porte close matérialise le fait qu'en cet endroit la transformation renvoie le point vers le point A, c'est-à-dire qu'elle nous fait revenir sur nos pas. De quelle distance? Nous l'ignorons. Aussi nous n'allons pas rebrousser chemin, mais restons sur le pas de la dernière porte ouverte en attendant ce que deviendra le couloir à la prochaine itération de la transformation. Divisons à nouveau les salles en salles plus petites. Leur porte s'ouvre ou se ferme selon la même règle que précédemment. Un certain nombre de portes s'ouvrent maintenant à nous que nous franchissons, jusqu'à devoir nous arrêter face à une porte close. En procédant ainsi indéfiniment, nous nous rapprochons de plus en plus d'une porte fermée. En terme géométrique, nous avançons à la rencontre d'un point qui se dirige vers nous. Un résultat élémentaire d'analyse (le théorème de Bolzano-Weierstrass précisément) nous assure alors qu'à la fois la porte fermée et nous, nous dirigeons de façon commune vers un point spécifique de AB. Par suite de la continuité de  $P$ , ce point vérifie l'égalité  $P^* = P(P^*)$ , et est donc un point fixe de  $P$ .

La preuve du théorème de Brouwer en dimension supérieure ou égale à deux est plus difficile qu'en dimension un, mais elle peut se construire d'une manière analogue. Elle consiste à considérer le cas d'une transformation continue d'un triangle équilatéral de sommets A, B, C en lui-même (notons, pour la généralité de la démonstration qu'un tel triangle est transformable en un disque par une application univoque et continue). On divise ensuite chacun des côtés du triangle en plusieurs segments de même taille, et on relie entre eux ces segments (voir l'encadré page 68), ce qui a pour effet de paver le triangle originel d'une mosaïque de petits triangles. Comme dans le cas à une dimension, la démonstration consiste à encadrer le point fixe avec des triangles de plus en plus petits. Cette preuve utilise un célèbre théorème combinatoire démontré par Sperner qui affirme que si l'on colore les sommets des petits triangles de trois couleurs différentes, un de ces triangles est nécessairement tricolore, c'est-à-dire que ses trois sommets sont de couleurs distinctes (voir l'encadré page 68).

Il existe de nombreuses autres preuves (une vingtaine au moins) du théorème de Brouwer. Elles font appel aux techniques les plus variées des mathématiques : l'analyse, l'algèbre, la topologie algébrique (l'étude par l'algèbre de propriétés des figures géométriques, invariantes par déformations continues), la topologie différentielle (idem, mais au moyen de l'analyse), la géométrie algébrique (l'étude des variétés définies par des équations algébriques), la combinatoire... Une telle richesse peut être interprétée comme une mesure de la profondeur mathématique du résultat. Une autre mesure est fournie par l'incroyable diversité des formes équivalentes sous lesquelles le théorème peut s'exprimer. Certaines d'entre elles furent même découvertes, comme nous allons le voir, avant la publication de l'article de Brouwer!

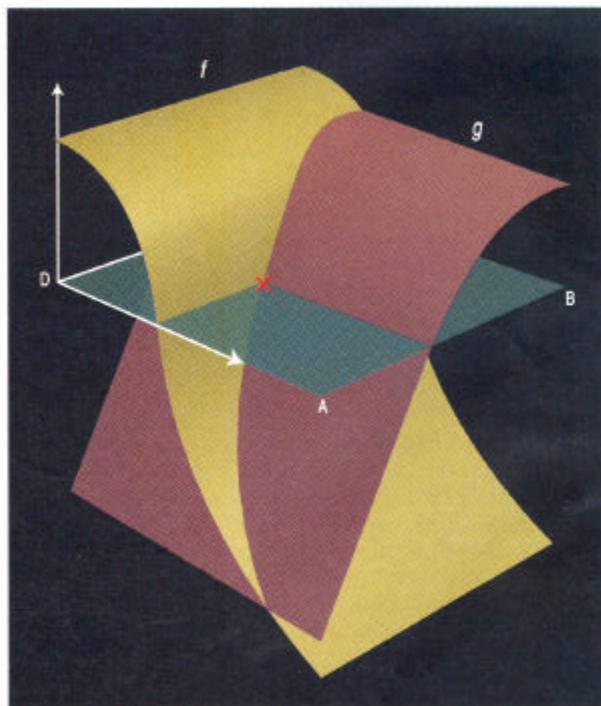
### Des ancêtres cachés

En 1883, le mathématicien français Henri Poincaré s'attachait à la question encore ouverte de la stabilité du système solaire et il cherchait si trois corps célestes s'attirant par gravité parcourent éventuellement des orbites péri-

diques. Il avait besoin d'une généralisation du théorème des valeurs intermédiaires mentionné plus haut. Il prouva à cette occasion le résultat suivant, que nous énonçons, pour simplifier, dans le cas particulier de deux équations à deux inconnues  $f(x, y) = 0$  et  $g(x, y) = 0$  : si l'on trouve un carré ABCD tel que  $f$  prend des signes opposés sur les côtés opposés AB et CD, et  $g$  prend des signes opposés sur les côtés opposés BC et DA, le système d'équations ci-dessus possède au moins une solution située dans le carré (voir la figure 4). Poincaré démontra en fait ce théorème dans le cas général d'un système d'équations comportant un nombre quelconque d'inconnues. Le théorème de Brouwer est un cas particulier du théorème de Poincaré.

Malheureusement, le résultat de Poincaré tomba dans l'oubli, et fut même redécouvert plusieurs fois entre 1883 et 1941, en particulier par le mathématicien italien Silvio Cinquini. La démonstration peu convaincante de S. Cinquini conduisit son compatriote Carlo Miranda à prouver, en 1941, l'équivalence du résultat de Cinquini avec le théorème de Brouwer. Pour cette raison, le théorème de Poincaré est souvent appelé théorème de Miranda. Pour les théorèmes comme pour les vins, il n'y a pas que des appellations contrôlées.

Autre apparition du théorème sous une forme distincte : en 1904, un mathématicien letton, Piers Bohl, publia un long article sur le comportement des solutions des équations différentielles de la mécanique. À cette occasion, il étudia les propriétés de certaines transformations continues d'un cube ou d'une boule centrés à l'origine d'un espace euclidien de dimension quelconque. Il montra en particulier que si l'on déforme continûment un tel cube



4. POINCARÉ A GÉNÉRALISÉ le théorème des valeurs intermédiaires pour un nombre de variables supérieur à un. Une fonction  $f$  qui prend des valeurs opposées sur les côtés AB et CD d'un carré ABCD, coupe nécessairement en un point du carré (la croix rouge) une fonction  $g$ , dont les valeurs sont opposées sur les côtés AD et BC. Ce théorème engendre le théorème du point fixe.

L'interprétation des langages de programmation est quelquefois définie de façon imprécise. Un même programme peut, selon les compilateurs – les logiciels qui traduisent les programmes en données assimilables par la machine –, donner des résultats différents. Pour lever ces ambiguïtés, Dana Scott et Christopher Strachey conçurent, en 1969, des méthodes fondées sur les points fixes. Depuis, l'usage des points fixes s'est étendu aux domaines de l'intelligence artificielle et du génie logiciel (bases de données, programmation, vérification des programmes...).

Commençons ce tour d'horizon des applications du point fixe en informatique par l'interprétation des langages de programmation. On a souvent recours dans la conception de programme à des boucles d'itération. Par exemple, le calcul d'un nombre  $n$  à la puissance  $q$  consiste à itérer  $q$  fois la multiplication par  $n$  :  $n^q = (((1 \times n) \times n) \dots \times n)$ . Chacune des parenthèses représente une étape d'une boucle d'itération. Pour compter le nombre d'étapes effectuées, on associe à la boucle une variable incrémentée à chaque réalisation d'une étape. Il peut se faire que cette variable interfère avec d'autres variables internes à la boucle. Illustrons cette idée avec l'exemple d'une boucle chargée d'afficher à l'écran deux valeurs, l'une à la suite de l'autre : 3, puis 6. Pour montrer les problèmes d'interprétation des compilateurs, nous avons donné le même nom,  $i$ , à la variable compteur et à la variable interne à la boucle :

```

i = 0
for i = 1 to 2 do           (i est ici une variable compteur)
  i := 3i ;                (i comme variable interne à la boucle)
  print i ;
end do

```

Pour exécuter cette boucle, certains compilateurs interpréteront le  $i$  compteur et le  $i$  interne à la boucle comme deux variables distinctes. Les compilateurs qui fonctionneront ainsi afficheront les bonnes valeurs : 3, puis 6. D'autres compilateurs, en revanche, assimileront les deux variables à une seule donnée, ne réaliseront la boucle qu'une seule fois, et n'afficheront que le premier des deux chiffres, 3. Pour cette raison, ce type de boucle est à éviter. Néanmoins, des informaticiens ont cherché à élaborer des langages, tel *Aida*, dont les compilateurs ne seraient pas confrontés à ces dilemmes. La solution retenue fut de définir de façon univoque les boucles à l'aide de points fixes.

Reprenons l'exemple du calcul de la puissance  $n^q$ . À ce calcul, faisons correspondre un point fixe d'une certaine transformation  $T$ . Ce point fixe n'est pas un nombre, mais une fonction (dans la suite, nous verrons qu'en informatique, les points fixes peuvent aussi être des ensembles). La transformation  $T$  associée à une fonction  $f(n, q)$  des variables  $n$  et  $q$ , la fonction qui vaut 1 si  $q$  est nul, et  $n \times f(n, q-1)$  sinon. La fonction  $n^q$  est bien un point fixe de la transformation  $T$  :  $T(n^q)$  est égal à 1 si  $q = 0$ , à  $n \times n^{q-1}$ , soit  $n^q$ , sinon, ce qui correspond bien aux valeurs de  $n^q$  quelle que soit la valeur que prend  $q$ .

Le résultat  $n^q$  est donc bien un point fixe ; pour remplacer la boucle, nous allons examiner comment l'atteindre. Appliquons la transformation  $T$  un certain nombre de fois ( $q + 1$  fois pour être exact) à la fonction vide  $\emptyset$  :

$$\begin{aligned}
 T[f] (n, q) &= \begin{cases} 1 & \text{si } q = 0 \\ n \times f(n, q-1) & \text{sinon} \end{cases} \\
 T[\emptyset] (n, q) &= \begin{cases} 1 & \text{si } q = 0 \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} \\
 T^n[\emptyset] (n, q) &= \begin{cases} 1 & \text{si } q = 0 \\ n \times T[\emptyset] (n, q-1) & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } q = 0 \\ n \times \begin{cases} 1 & \text{si } q = 1 \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} & \text{sinon} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1 & \text{si } q = 0 \\ n & \text{si } q = 1 \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} \\
 &\vdots \\
 T^{q+1}[\emptyset] (n, q) &= \begin{cases} 1 & \text{si } q = 0 \\ n^q & \text{sinon} \end{cases} = n^q
 \end{aligned}$$

Nous voyons, à travers l'exemple de cette fonction  $n^q$ , que les points fixes définissent des fonctions par une boucle qui ne présente pas d'ambiguïté sur l'utilisation des indices. Les points fixes donnent un «sens mathématique» aux boucles. Précisons que le programmeur ne change pas ses habitudes de programmation ; il continue à écrire ses boucles comme précédemment ; l'utilisation de point fixe ne concerne que le programmeur en charge du compilateur qui transforme les boucles en points fixes.

### Les points fixes de bases

Les points fixes facilitent la construction et l'utilisation de bases de données de taille variable. Par exemple, afin de répondre aux demandes de leurs clients désirant se rendre d'une ville à une autre, les compagnies aériennes ont déterminé, pour chacune des villes qu'elles desservent, les liaisons possibles avec les autres villes. Pour stocker cette information dans des fichiers, il faudrait construire ces fichiers en prenant une par une les villes desservies et en vérifiant s'il existe un vol les connectant avec chacune des autres villes, par autant d'intermédiaires que nécessaires. Cette méthode présente l'inconvénient de devoir recommencer l'intégralité de la procédure chaque fois que la compagnie aérienne ajoute une ville à sa liste de destinations.

Cet inconvénient disparaît avec les méthodes de points fixes. Prenons le cas d'une compagnie aérienne qui dessert quatre aéroports, Paris, Nantes, Nice et Bordeaux, et propose les liaisons aériennes (Nantes, Paris), (Paris, Nice), et (Paris, Bordeaux) :



D'après cette liste, le trajet Nantes - Nice est, parmi d'autres, possible via Paris. Notre objectif est de disposer de l'ensemble des trajets, y compris ceux avec correspondance. Ici, les objets mathématiques auxquels sont appliquées les transformations sont des ensembles. Comme nous le verrons, la transformation  $T$  transforme une liste en la réunion de la liste des vols directs et de la liste obtenue par composition des vols directs et de cette liste.

Par composition, on entend la mise en relation des villes jointes par une ville intermédiaire : la composition

## Informatique

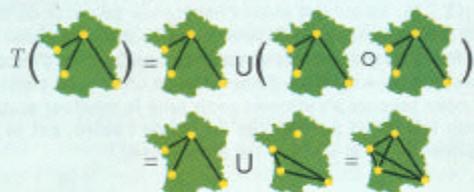
– notée  $\circ$  – du couple de villes  $(X, Y)$  avec le couple  $(Y, Z)$  est le couple  $(X, Z)$  :



Le point fixe de  $T$  est la liste où figurent tous les vols possibles. Il est obtenu en un nombre d'itérations inférieur au nombre de villes. Selon la définition de  $T$ , nous écrivons :



Nous appliquons la transformation  $T$  au premier résultat pour aboutir au point fixe :



En calculant l'image de cette liste par la transformation, on trouverait qu'elle est égale à elle-même, ce qui nous prouve qu'elle représente bien le point fixe de  $T$ . Ici deux itérations suffisent : le point fixe obtenu comporte bien toutes les liaisons aériennes possibles.

Les opérations que nous venons d'effectuer sur une liste à trois couples de villes ne dépendent pas du nombre total de villes. Pour un nombre supérieur à trois couples, le principe resterait le même, le seul changement étant le nombre d'itérations de la transformation pour atteindre le point fixe. Avec cette méthode, le programmeur qui met à jour la base de données en incorporant une nouvelle destination se contente d'ajouter la ville correspondante à la liste originelle ainsi que les villes qui lui sont reliées par un vol direct. Nul besoin d'implémenter le logiciel de réservation pour qu'il tienne compte d'une nouvelle ville, ni de calculer ou stocker toutes les villes qui lui sont reliées. Lorsqu'un client demandera à aller d'une ville à une autre, le logiciel calculera les divers trajets possibles en utilisant la base de données enrichie et la transformation  $T$ .

### Les points fixes vérificateurs

Le but de la vérification est de spécifier, puis vérifier les propriétés des programmes. Imaginons un ensemble de supermarchés d'une même chaîne qui chaque soir mettent à jour leur stock local, puis passent leur commande à l'entrepôt central. Pour passer commande, le supermarché doit établir une liaison, téléphonique ou informatique, avec sa centrale. Il peut y avoir plusieurs échecs avant d'obtenir la connexion. Pour vérifier le bon fonctionnement du système, comme on ignore le nombre d'échecs, il faut envisager les cas de figures où la liaison

s'établit après un, deux, trois, ... essais. Il est irréaliste d'étudier l'infinité des cas. Les méthodes de point fixe permettent de surmonter cette difficulté. Elles reviennent à considérer chaque nouvel essai comme un rapprochement abstrait vers un point fixe. La transformation considérée ici est la tentative de connexion, et l'objet mathématique auquel on applique cette transformation est l'état de l'ordinateur, connecté ou non. En procédant ainsi, on élimine le problème posé par le nombre inconnu et arbitrairement grand d'échecs de connexion : ce nombre est représenté par le point fixe lui-même.

Par ailleurs, tel Prométhée qui fut condamné à voir éternellement son foie mangé par l'aigle le jour, puis régénéré la nuit, le supermarché répète l'opération «connexion, puis commande» tous les soirs. Un autre point fixe représentera cette répétition perpétuelle. D'une certaine manière, les points fixes permettent d'éliminer la référence explicite au temps, car ils synthétisent l'évolution dans le temps de tous les calculs qui convergent vers le point fixe. Ce type de méthode est utile pour la vérification de systèmes complexes synchronisés. Par exemple, sous la direction de André Arnold, de l'Université de Bordeaux, des logiciels de compteurs électriques à télé-relève (relevés à distance) ont été vérifiés et améliorés.

### Le Banach des informaticiens

Ces exemples nous ont montré comment tirer parti des propriétés du point fixe, mais nous avons omis de dire dans quel cas une transformation admet un point fixe. Le résultat fondamental est le théorème du point fixe de Knaster-Tarski, démontré en 1942 par Tarski (1902 - 1983), et publié en 1955. Le théorème de Tarski est l'équivalent, pour les informaticiens, du théorème de Banach des mathématiciens. Esquissons ce théorème. Les objets naturels en informatique sont ordonnés ; par exemple, les ensembles sont ordonnés par inclusion, un ensemble est plus grand qu'un autre s'il le contient. Le théorème de Tarski assure que, sous certaines conditions, si une transformation  $T$  préserve l'ordre,  $T$  a un plus petit point fixe et un plus grand point fixe. Ainsi, l'exemple du supermarché met en jeu deux points fixes : un plus petit point fixe (qui réalise la connexion) imbriqué dans un plus grand point fixe (qui réalise la répétition perpétuelle du protocole «connexion + commande»). En général, un plus petit point fixe représente un événement qui finira par arriver un jour, et un plus grand point fixe représente un événement qui se répète sans fin. Des combinaisons arbitraires de plus grands et plus petits points fixes peuvent être utiles en vérification. Comment identifier la meilleure combinaison et la calculer efficacement? C'est l'un des principaux thèmes de recherche actuels en vérification.

Irène GUESSARIAN,  
Professeur à l'Université Paris 6,  
chercheur au Laboratoire d'informatique algorithmique :  
fondements et applications (LIAFA).

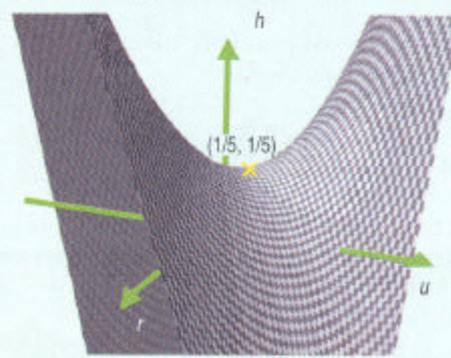
PROBABILITÉS DES SITUATIONS

ROGER		
URSULE		
	$r$	$1-r$
	$u$	$u$
	$r$	$1-r$
	$1-u$	$1-u$

GAINS

ROGER		
URSULE		
	4	0
	0	1

ESPÉRANCE DE GAIN D'URSULE



5. JEU NON COOPÉRATIF À DEUX JOUEURS où apparaît un équilibre de Nash. Roger cache une main derrière son dos, et Ursule doit deviner si elle est ouverte ou fermée. Pour déterminer son choix, chacun tire au hasard selon certaines probabilités : Roger a la probabilité  $r$  de fermer sa main, et Ursule la probabilité  $u$  d'annoncer qu'elle est fermée. Tous les deux peuvent choisir les valeurs des probabilités. Le tableau de gauche résume les probabilités des différentes situations qui peuvent se présenter. Par exemple, la situation «main de Roger ouverte - annonce d'Ursule main ouverte» a pour probabilité le produit  $(1-r)(1-u)$ . Les gains remportés par Ursule selon les situations sont indiqués dans le tableau du centre. Ainsi, si Roger

ouvre la main et si Ursule devine juste, celui-ci remporte 1 euro. L'espoir de gain attendu par Ursule de cette situation vaut donc 1 euro multiplié par  $(1-r)(1-u)$ . Au total l'espoir de gain d'Ursule - somme du gain des quatre situations possibles - est de  $4ru + (1-r)(1-u)$ , ce qui est aussi l'espérance de perte de Roger. La surface à droite représente l'espoir total de gain d'Ursule. Il y a équilibre de Nash quand la représentation graphique de l'espoir de gain d'un des joueurs a la forme d'une selle de cheval. Le choix optimal, où les deux joueurs s'estiment avoir joué le meilleur coup à la fois selon leur intérêt et par rapport au jeu de l'autre, est le point d'inflexion principal de la surface (la croix jaune).

par une transformation qui laisse fixes les faces du cube, alors le cube original est contenu dans le cube déformé (aucun point ne sort du cube). Dans la version en dimension deux, toute déformation, sans déchirure, d'une membrane élastique solidement fixée au cadre formé par les côtés d'un carré, recouvre entièrement ce carré. Ce résultat est aussi une conséquence facile du théorème de Poincaré, mais Bohl ne connaissait pas le travail du mathématicien français. En 1931, sans avoir connaissance de l'article de Bohl, le mathématicien polonais Karel Borsuk retrouva un résultat semblable pour la boule, en prouvant que, dans un espace euclidien de dimension finie, il est impossible de déformer continûment une boule en sa frontière, en laissant fixes les points de la frontière. En d'autres termes, même en la supposant parfaitement élastique, il est impossible de repousser complètement la peau d'un tambour, sans la trouer, sur le cadre qui la maintient.

### Équilibres de Nash et points fixes en théorie des jeux

En 1994, le prix Nobel d'économie était attribué à John Harsanyi, John Nash et Reinhard Selten pour la définition du concept d'équilibre dans la théorie des jeux non coopératifs. Le deuxième lauréat a eu une carrière des plus singulières puisqu'il dut abandonner un poste de professeur à l'Institut de technologie du Massachusetts en raison de troubles mentaux graves et diagnostiqués irréversibles. Après plusieurs internements, une rémission inespérée lui a permis de reprendre une vie normale et d'aller recevoir la prestigieuse récompense. Le résultat qui lui a valu ce prix Nobel - la théorie de l'équilibre d'un jeu non-coopératif -, datait de plus de 40 ans en 1994, et était fondé sur le théorème du point fixe.

La vie de John Nash est évoquée dans le film «Un homme d'exception» et la pièce de théâtre «La preuve» ; ces

excellentes œuvres nous font entrevoir comment pense un mathématicien d'exception sans entrer dans le détail de ses travaux. La seule remarque péjorative est que l'on y associe, comme si cela était naturel, activité mathématique intense et folie. Revenons aux travaux de John Nash. En économie, le terme de «jeu» est employé au sens large et désigne toute situation où des individus ont une décision à prendre. Les jeux non coopératifs, telles les élections, correspondent aux cas où les individus ne s'échangent pas d'informations. Dans l'étude de ces jeux, la question est de savoir quel intérêt les individus ont-ils à prendre telle ou telle décision? Peuvent-ils prévoir quel choix adopteront les autres participants et jouer en conséquence? J. Nash a cherché des cas de figure où les anticipations des joueurs s'accordent entre elles, c'est-à-dire des situations où chaque joueur estime avoir joué au mieux selon ses propres critères et aussi par rapport aux choix des autres.

Illustrons ces notions par un exemple simple ne comportant que deux joueurs, Roger et Ursule, adapté d'un problème posé, il y a presque trois siècles, par Rémond de Montmort (1678 - 1719), un célèbre spécialiste des jeux et de leur théorie. Roger cache une main derrière son dos, la tient ouverte ou fermée et demande à Ursule d'en deviner la nature. Si Ursule se trompe, il ne lui donne rien. En revanche, si Ursule répond juste, il lui donne quatre euros ou un euro selon que la main est fermée ou ouverte. De prime abord, Roger a tout intérêt à ouvrir la main : Ursule gagnera au mieux un euro. Il peut toutefois se dire que Ursule fera ce raisonnement et déduira que la main est ouverte. Mieux vaut alors pour lui en fait de fermer la main pour contrecarrer le raisonnement d'Ursule. Cependant, Ursule peut prolonger encore sa logique et déterminer le nouveau choix de Roger. On le voit, ce raisonnement peut se prolonger indéfiniment, sans que l'on puisse trancher, pour n'importe quel des deux camps, quelle option choisir.

La situation diffère dans le cas où Roger se fixe une probabilité  $r$  de fermer sa main (et donc  $1 - r$  de l'ouvrir) et tire au sort sa décision selon cette probabilité. Supposons qu'Ursule fasse de même pour son choix, avec une probabilité  $u$  de dire que la main de Roger est fermée. Évaluons ce qu'Ursule peut espérer gagner en fonction des probabilités  $r$  et  $u$ . La probabilité que la main de Roger soit fermée et qu'Ursule dise qu'elle est fermée est égale au produit  $ru$ . La probabilité que la main soit ouverte et qu'Ursule dise qu'elle est ouverte vaut  $(1 - r)(1 - u)$ . Puisque dans les cas où la première possibilité se présente, Ursule gagne quatre euros, ce cas de figure lui fait espérer en moyenne (si Roger et Ursule réitèrent de nombreuses fois le jeu) quatre euros multipliés par  $ru$ . De même, le second cas de figure lui laisse espérer un euro multiplié par  $(1 - r)(1 - u)$ . Au total, l'espoir de gain,  $h$ , d'Ursule est (voir la figure 5) :  $h(r, u) = 4ru + (1 - r)(1 - u) = 5ru - r - u + 1$ . Comme Roger perd ce que Ursule gagne, l'espoir de gain de Roger,  $f$ , vaut  $-h$ .

Lorsqu'un joueur choisit sa probabilité, il ne raisonne pas isolément, mais prend en compte le point de vue de son adversaire : il cherche à maximiser son espoir de gain tout en ayant à l'esprit que l'autre joueur fait de même. L'ingéniosité de Nash a été de traduire cette recherche de compromis entre espoirs de gain en langage mathématique. Au terme de leur raisonnement, les deux joueurs choisiront les probabilités  $r^*$  et  $u^*$  - si elles existent - telles que  $h$  soit en ce point un maximum local pour  $u$  et un minimum local pour  $r$  (comme  $f$  vaut  $-h$ , un maximum de  $f$  correspond à un minimum de  $h$ ). Cette situation se présente dans le cas où le graphe de  $h$  au voisinage du point  $(r^*, u^*)$  a la forme d'une selle de cheval ou d'un col en montagne (voir la figure 5). Ce couple de probabilités s'appelle aujourd'hui un équilibre de Nash. Les hypothèses de l'existence de l'équilibre de Nash sont donc la concavité de  $f$  par rapport à  $r$  et sa convexité par rapport à  $u$ . Les fonctions de gain possèdent souvent cette propriété.

Nash généralisa ces notions aux cas de trois joueurs et remarqua que les conditions de l'équilibre se résument alors à l'existence d'un point fixe. Considérons trois joueurs et leur fonction de gain respectif  $h$ ,  $f$  et  $g$ , qui dépendent des trois variables  $r$ ,  $u$  et  $s$ . Supposons que, pour chaque  $u$  et  $s$  fixés, la fonction  $h$  atteigne un maximum unique en un point  $M(u, s)$ , pour chaque  $r$  et  $s$  fixé, la fonction  $g$  atteigne un maximum unique en un point  $Q(r, s)$ , et pour chaque  $r$  et  $u$  fixés, la fonction  $f$  atteigne un maximum unique en un point  $N(r, u)$ . La transformation  $T$  définie par  $T(r, u, s) = (M(u, s), Q(r, s), N(r, u))$  applique continûment en lui-même l'espace formé par les trois variables. Cet espace est fermé, borné et convexe (un ensemble convexe contient le segment joignant deux quelconques de ses points), et donc homéomorphe à une boule. Le théorème du point fixe de Brouwer assure l'existence d'un point fixe  $P^* = (r^*, u^*, s^*)$  de  $T$ . On a donc  $r^* = M(u^*, s^*)$ ,  $u^* = Q(r^*, s^*)$ ,  $s^* = N(r^*, u^*)$ , ce qui traduit le fait que  $(r^*, u^*, s^*)$  est un équilibre de Nash.

En 1941, le mathématicien américain d'origine japonaise Shizuo Kakutani a étendu le théorème de Brouwer à des multi-applications, c'est-à-dire à des transformations associant, à un point d'un espace euclidien, non un autre point, mais un ensemble de points, fermé, borné et convexe de cet espace. Selon Gérard Debreu, prix Nobel d'économie en 1983 : «Pour la théorie des jeux et l'économie, le théorème de Kakutani a été pour plus de

trois décades l'outil principal pour démontrer l'existence d'un équilibre économique.»

## Un volume sans point fixe

Les applications des théorèmes du point fixe de Banach et de Brouwer et de leurs généralisations sont nombreuses et variées. Elles ne se limitent pas à la mécanique céleste, à l'économie ou à la théorie des jeux. Presque tous les théorèmes d'existence d'une solution aux types les plus variés d'équations y font appel, et il est difficile de trouver un fascicule d'un journal mathématique consacré aux équations différentielles, intégrales ou aux dérivées partielles sans article fondé sur un théorème du point fixe. Comme la plupart des modélisations mathématiques de phénomènes naturels et de problèmes technologiques conduisent à de telles équations, on imagine sans peine le nombre de travaux qui font appel à la théorie des points fixes.

On se contentera de signaler une question d'actualité dans l'étude de l'évolution de populations d'êtres vivants en interaction. Si deux populations coexistent sur un territoire donné, elles peuvent coopérer, être en compétition (pour une nourriture commune par exemple), ou même se dévorer. L'évolution temporelle de ces populations se modélise par un système de deux équations différentielles non linéaires, impossible à résoudre explicitement. Pour maintenir la diversité, il est intéressant de trouver des conditions sous lesquelles les deux populations survivront, c'est-à-dire sous lesquelles leurs tailles resteront supérieures à une quantité strictement positive. On peut alors se demander si un tel système admettra un équilibre dans lequel les deux populations gardent une taille constante. L'existence de l'équilibre est une conséquence du théorème de Brouwer, et le résultat s'étend à un nombre quelconque de populations.

La littérature mathématique regorge de nombreux problèmes ouverts au sujet du théorème du point fixe. Ainsi, on dit qu'un espace topologique  $E$  a la propriété de point fixe si toute application continue de  $E$  en lui-même a au moins un point fixe. La boule dans un espace euclidien de dimension finie a cette propriété. Le cercle ou l'anneau dans le plan, la sphère ou le tore dans l'espace ne l'ont pas, ce qui s'explique par leur structure «trouée». Cependant, en 1953, le mathématicien japonais Kinoshita a construit dans l'espace usuel un ensemble compact et contractible (continûment déformable en un point) qui n'a pas la propriété de point fixe! Nous sommes loin d'avoir pleinement caractérisé l'ensemble des espaces topologiques ayant la propriété de point fixe.

---

Jean MAWHIN est mathématicien à l'Université de Louvain. Il est président sortant de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.

L'auteur remercie Alexandre Gaudillière et Jean Lefort pour leurs suggestions à propos du lemme de Sperner.

D. Smart, *Fixed point theorems*, Cambridge university press, 1974.

K. Kuratowski, *Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie*, Publication de l'enseignement mathématique, Université de Genève, 1966.

I. Ekeland, *La théorie des jeux*, Presses universitaires de France, 2000.

---