Tutorat 4

Frédéric Chevy – chevy@lkb.ens.fr

Transformées en ondelettes

www.lkb.ens.fr/∼chevy/tutorat/tut.htm

Bien qu'ayant prouvé toute sa puissance dans l'analyse du signal, la transformée de Fourier s'avère peu adaptée à l'étude de signaux non périodiques. C'est pour pallier ses faiblesses qu'à été développée au cours des années 80 la transformée en ondelette, aussi appelée analyse multiéchelle[1].

1. **Principe de la transformée en ondelette**. Soient deux fonctions $s(t)$ et $\psi(t)$ appartenant toutes deux à $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$. On nommera s le signal et ψ l'ondelette analysatrice. Dans la suite, on note $\psi_{\lambda,a}(t) = \psi(\lambda(t-a))$ et on définit la transformée en ondelette de s par :

$$\tilde{s}_{\lambda,a} = \lambda \int_{\mathbb{R}} dt\, s(t)\psi_{\lambda,a}(t).$$

   (a) Comparer qualitativement les fonctions ψ et $\psi_{\lambda,a}$. Donner une interprétation "géométrique" de $\tilde{s}$ et justifier le terme d'analyse multi-échelle donnée à la transformée en ondelette.

   (b) *Transformée inverse*. On souhaite montré que l'on peut reconstruire s à partir de la donnée de $\tilde{s}$ et que l'on a une relation de transformée en ondelette inverse

$$s(t) = \frac{1}{C_\psi}\int_{\mathbb{R}} da \int_{\mathbb{R}^+} d\lambda \tilde{s}(\lambda, a)\psi_{\lambda,a}(t),$$

   où C_ψ est une constante dépendant de l'ondelette analysatrice choisie et dont on donnera l'expression plus loin.

      i. On note $\hat{f}$ la transformé de Fourier de f définie par

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} f(t).$$

      Montrer que

$$\hat{\tilde{s}}(\lambda, \omega) = \sqrt{2\pi}\hat{s}(\omega)\hat{\psi}(-\omega/\lambda),$$

      où la transformée de Fourier se fait sur la variable a.

[1] Voir en fin d'énoncé les extraits de *Ondes et ondelettes*, Barbara Burke Hubbard, Pour la Science, Collection Science d'avenir, diffusion Belin, 1995.

ii. On considère $F(t)$ définie par

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}^+} d\lambda \int_{\mathbb{R}} da\, \tilde{s}(\lambda, a)\psi_{\lambda,a}(t).$$

En utilisant la question précédente, montrer que

$$\hat{F}(\omega) = C_\psi(\omega)\hat{s}(\omega),$$

avec

$$C_\psi = \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}^+} d\lambda \int_{\mathbb{R}} dt'\, \hat{\psi}(-\omega/\lambda)\psi(\lambda t')e^{-i\omega t'},$$

et où l'on supposera l'intégrale convergente pour le moment.

iii. Montrer que $C_\psi(\omega)$ est indépendant de ω et en déduire que

$$C_\psi = 2\pi \int_{\mathbf{R}^+} \frac{du}{u}\, |\hat{\psi}(u)|^2.$$

iv. *Condition d'admissibilité*. Montrer qu'une condition suffisante pour que C_ψ soit défini est d'avoir

$$\int_{\mathbb{R}} dt\, \psi(t) = 0.$$

Justifier le nom d'ondelette donné à ψ.

2. **Ondelette de Harr et familles d'ondelettes orthogonales**. La relation d'inversion de la transformée en ondelette est redondante puisqu'elle nécessite une double intégrale pour calculer s. Nous allons montrer qu'en choisissant une famille d'ondelettes orthogonales, il est possible de reconstruire s à partir d'une somme *discrète* de termes.

Dans la suite, et pour simplifier, on se limite à $s \in \mathcal{L}_2([0,1])$ doté du produit scalaire

$$\langle s'|s\rangle = \int_{[0,1]} s'(t)s^*(t)\, dt,$$

et on note $\|s\|_2^2 = \langle s|s\rangle$ la norme associée.

Soit χ_I la fonction caractéristique de l'intervalle I. On définit l'ondelette de Harr par

$$\psi(t) = \chi_{[0,1/2]}(t) - \chi_{[1/2,1]}(t).$$

(a) Montrer que ψ satisfait à la condition d'admissibilité énoncée à la question 1(b)iv).

(b) Pour $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ et $k \leq 2^j - 1$, on pose $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$. Tracer qualitativement $\psi_{j,k}$. En déduire que

$$\langle \psi_{j,k}|\psi_{j',k'}\rangle = \delta_{j,j'}\delta_{k,k'}.$$

Dans la suite, on souhaite montrer que tout élément de $\mathcal{L}_2([0,1])$ peut s'écrire (à une constante près) comme une somme sur les $\psi_{j,k}$.

(c) On introduit $\phi = \chi_{[0,1]}$ et $\phi_{j,k} = 2^{j/2}\phi(2^j t - k)$. Tracer les $\phi_{j,k}$.

(d) On pose $V_j = \mathrm{Vec}(\phi_{j,k})_{k=0..2^j-1}$.

i. Représenter graphiquement un élément quelconque de V_j.

ii. Montrer que les $\phi_{j,k}$ forment une base orthonormée de V_j.

iii. Montrer que l'on a la relation d'inclusion

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset ... \subset V_j \subset ... \subset \mathcal{L}_2(\mathbb{R}).$$

(e) On pose $W_j = \mathrm{Vec}(\psi_{j,k})_{k=0..2^j-1}$.

i. Montrer que $W_j \subset V_{j+1}$.

ii. Montrer que $\langle \phi_{j,k} | \psi_{j,k'} \rangle = 0$.

iii. En comparant les dimensions de V_j, W_j et V_{j+1}, montrer que

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

En déduire que

$$V_j = V_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_{j-1}.$$

(f) Déduire des questions précédentes que la famille constituée de ϕ et des $\psi_{j,k}$ forment une famille orthonormée dense dans $\mathcal{L}_2([0,1])$. En déduire que pour tout $f \in \mathcal{L}_2([0,1])$, on a

$$f(x) = \langle f | \phi \rangle + \sum_{j,k} \langle f | \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

Pour cela, on admet les résultats suivants :

- Soit $\mathcal{E}_j([0,1])$ l'ensemble des fonctions g étagées sur $[0,1]$ de la forme

$$g = \sum_{k=0}^{2^j-1} c_k \chi_{[k/2^j,(k+1)/2^j]}.$$

  Soit $f \in \mathcal{L}_2([0,1])$. On admet que $\forall \epsilon > 0$ il existe $j \in \mathbb{N}$ et $g \in \mathcal{E}_j([0,1])$ tel que $\|f - g\|_2 < \epsilon$.

- Soit $\mathcal{H}$ un espace hermitien. On suppose qu'il existe une famille orthogonale $x_{\alpha \in \mathcal{A}}$ d'éléments de $\mathcal{H}$ dense dans $\mathcal{H}$ et paramétrée par un ensemble $\mathcal{A}$. Alors on dit que les x_α forment une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ et pour tout $x \in \mathcal{H}$, on a

$$x = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle x | x_\alpha \rangle x_\alpha.$$

35. C. F. GAUSS, *Theoria Interpolationis Methodo Nova Tractata*, Werke Band III, p. 307, Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1866. Ce texte est en latin. Il en existe une version anglaise dans *A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century*, de H. H. Goldstine, Springer-Verlag, N.Y. 1977, pp. 249-258.

36. E. T. BELL, *Invariant Twins, Cayley and Sylvester*, p. 361, dans James NEWMAN, *The World of Mathematics*, vol. 1, Simon and Schuster, N.Y., 1956.

2

La recherche de nouveaux outils

La transformation de Fourier rapide a eu un important succès ; peut-être même a-t-elle trop bien réussi. «Parce que la FFT est très efficace, elle est employée dans des problèmes auxquels elle est inadaptée, remarque Yves Meyer. On abuse de la FFT, de même que les Américains prennent leur voiture pour aller jusqu'au coin de la rue.»

L'analyse de Fourier ne convient ni à tous les signaux ni à tous les problèmes ; dans certains cas, ceux qui l'utilisent ressemblent à une personne qui cherche une pièce de monnaie sous un réverbère, bien qu'elle l'ait laissée tomber ailleurs, car c'est là que c'est éclairé.

Quelle zone l'analyse de Fourier éclaire-t-elle? Elle aide à résoudre les problèmes linéaires, pour lesquels l'effet est proportionnel à la cause. Les problèmes non linéaires sont plus difficiles. On a peine à prédire le comportement des systèmes non linéaires, car une infime variation de paramètres peut bouleverser le résultat. La loi de la gravitation est non linéaire : lorsqu'on considère plus de deux corps en interaction gravitationnelle dans l'espace, on ne parvient pas à prédire leur comportement à long terme ; le système est trop instable. Les ingénieurs utilisent astucieusement cette instabilité pour envoyer une sonde spatiale vers de lointaines planètes : en s'approchant de l'orbite d'une planète, la sonde acquiert de la quantité de mouvement, puis une poussée des fusées de correction la bascule hors de l'orbite, pour lui permettre de poursuivre son voyage.

«On dit parfois que la grande découverte du XIX^e siècle était que les équations de la nature sont linéaires, et la grande découverte du XX^e siècle est qu'elles ne le sont pas, écrit Körner[1].»

Face à un problème non linéaire, les ingénieurs ont souvent recours à l'expédient grossier suivant : ils le traitent comme s'il était linéaire, en espérant que la solution qu'ils obtiendront ne sera pas trop erronée.

Ainsi les ingénieurs chargés de préserver Venise des inondations annuelles, pendant lesquelles les Vénitiens traversent la Piazza San Marco sur des trottoirs sur pilotis, aimeraient prédire les inondations suffisamment tôt pour élever des digues gonflables. Puisqu'ils ne peuvent résoudre l'équation aux dérivées partielles non linéaire qui détermine le comportement des crues (une équation qui tient compte des vents, de la position de la Lune, de la pression atmosphérique...), ils la réduisent à une équation linéaire et la résolvent par l'analyse de Fourier. Des progrès ont été réalisés, mais il arrive qu'une montée des eaux d'un mètre ou plus survienne à l'improviste.

Une défiguration de la réalité

L'analyse de Fourier possède d'autres limites. Elle est irréprochable sur le plan mathématique, mais «même les experts n'ont pas toujours su dissimuler leur malaise quant à l'interprétation physique des résultats obtenus avec la méthode de Fourier», écrivit Dennis Gabor[2], un spécialiste du traitement du signal qui reçut, en 1971, le prix Nobel pour l'invention de l'holographie. Les éléments d'analyse de Fourier sont les sinus et cosinus, qui oscillent éternellement, avec une fréquence fixe. Dans ce cadre de temps infini, «l'expression "fréquence changeante" devient une contradiction», écrivit Gabor. Toutefois les sirènes, la parole, la musique, etc. ont des fréquences changeantes.

Une transformée de Fourier cache l'information sur le temps : elle clame le nombre de fréquences contenues dans le signal, mais tait l'instant d'émission des diverses fréquences. Elle agit comme si chaque instant du signal équivalait à tout autre, que le signal soit aussi complexe qu'une symphonie de Mozart ou aussi simple et brutal qu'un électrocardiogramme de crise cardiaque.

L'information sur le temps n'est pas perdue (on peut reconstruire le signal à partir de la transformée), mais elle est soigneusement ensevelie sous les phases : les mêmes sinus et cosinus peuvent représenter des moments très différents du signal parce qu'ils sont décalés en phase pour s'amplifier ou s'annuler.

Imaginez un lac où les vagues se compensent de manière à créer une surface lisse comme un miroir, entourée de vagues de deux mètres et de quelques rides au loin... Cette situation est courante dans les signaux électromagnétiques et dans le son ; les mêmes vagues, oscillant immuablement, se combinent pour former des signaux qui changent constamment. Séparément, les vagues ne contiennent aucune information ; ensemble, les mêmes vagues transmettent le final d'une symphonie, suivi d'un moment de silence ou, dans un électrocardiogramme, la ligne agitée produite par les battements du cœur, qui devient plate après le décès du patient.

Ce phénomène est difficile à concilier avec notre expérience et notre intuition physique ; le physicien J. Ville le qualifia même de «défiguration de la réalité»[3]. Le finale d'une symphonie ne sonne pas comme le silence ; la vie n'est pas la mort. L'analyse de Fourier est donc inadaptée aux signaux qui changent brusquement et de manière imprévisible ; or, dans le traitement du signal, de tels changements contiennent souvent l'information la plus intéressante.

En théorie, on peut extraire l'information sur le temps en calculant les phases à partir des coefficients de Fourier. En pratique, les calculer avec assez de précision est impossible, et le fait qu'une information sur un moment du signal est répandue parmi toutes les fréquences de la transformée est un défaut majeur. Une caractéristique locale du signal devient une caractéristique globale de la transformée : une discontinuité, par exemple, est représentée par une superposition de toutes les fréquences possibles. Il n'est pas toujours possible de déduire d'une telle superposition que le signal est discontinu – il l'est encore moins de localiser cette discontinuité.

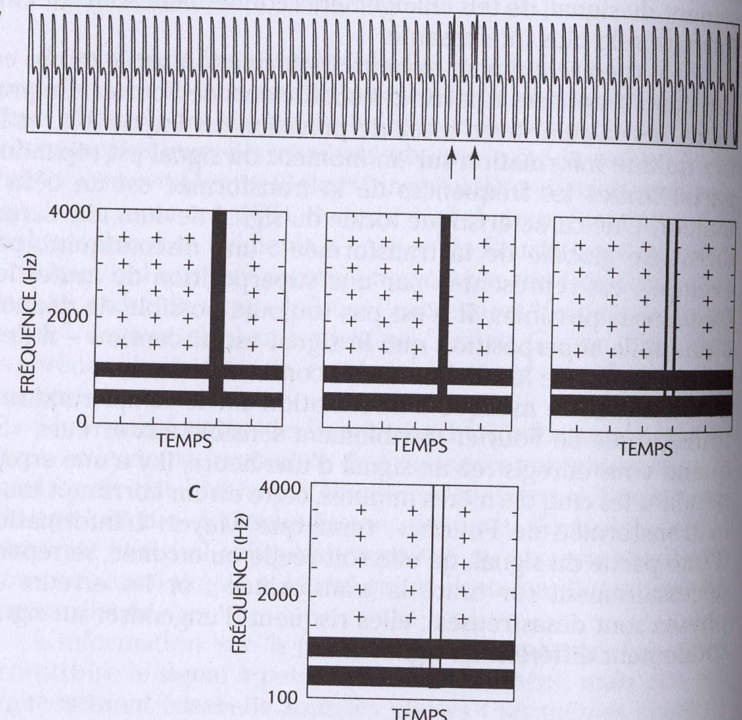
En plus, le manque d'information sur le temps rend une transformée de Fourier terriblement sensible aux erreurs. «Si, quand vous enregistrez un signal d'une heure, il y a une erreur pendant les cinq dernières minutes, cette erreur corrompt toute la transformée de Fourier», remarque Meyer. L'information d'une partie du signal, qu'elle soit réelle ou erronée, se répand nécessairement sur toute la transformée ; or les erreurs de phases sont désastreuses : elles risquent d'engendrer un signal totalement différent du signal initial.

A la recherche du temps caché : l'analyse de Fourier à fenêtre

L'analyse de Fourier nous oblige à choisir comme variable soit le temps, sur le versant physique de la transformée, soit la fréquence, sur l'autre versant. Pourtant, «nos expériences quotidiennes – notamment nos sensations auditives – imposent une description en termes de temps et de fréquences», écrivit

Gabor[4]. Pour analyser les signaux à la fois en temps et en fréquence, il montra comment utiliser la transformation de Fourier «à fenêtre». L'idée consiste à décomposer un signal en fréquences, intervalle par intervalle : de cette manière, on limite la plage de temps analysée. La fenêtre, qui définit la taille de l'intervalle analysé, est une fonction dont la représentation graphique est un morceau de courbe ; celle-ci délimite une zone qui contient des oscillations. La taille de la fenêtre ne change pas pendant l'analyse, mais on la remplit successivement d'oscillations de fréquences différentes (voir la figure 7*a*, page 65).

Tandis que la transformation de Fourier classique compare le signal entier à des sinusoïdes infinies de diverses fréquences, la transformation de Fourier à fenêtre compare un segment du signal à des morceaux de courbes oscillantes de différentes fréquences. Quand on a analysé un segment, on fait «glisser» la fenêtre le long du signal, pour en analyser un autre.



6. Un signal *(a)*, échantillonné 8 000 fois par seconde, comporte deux pics (indiqués par des flèches). Ce signal est analysé par trois transformée de Fourier à fenêtre *(b)*, de largeurs 12,8, 6,4 et 3,2 millisecondes. La fenêtre large donne la meilleure résolution pour les deux fréquences principale du signal, mais on ne distingue pas les deux impulsions ; en réduisant la largeur de la fenêtre, la résolution est meilleure en temps, mais moins bonne en fréquence. L'analyse par ondelettes *(c)* distingue à la fois les deux impulsions et les deux fréquences principales. (Avec l'aimable autorisation de I. Daubechies et SIAM)

Toutefois le choix d'une fenêtre de taille fixe implique de sérieux compromis. Quand la fenêtre est étroite, on localise les changements soudains, tels que les pics et les discontinuités, mais on devient aveugle aux basses fréquences du signal, de période trop grande pour entrer dans la petite fenêtre. Quand la fenêtre est large, on ne peut préciser l'instant où se produit un pic ou une discontinuité : cette information est noyée dans la totalité de l'information correspondant à l'intervalle de temps sélectionné par la fenêtre.

Aussi Yves Meyer, qui connaissait bien la puissance et les limites de l'analyse de Fourier (outil de base de son sujet, l'analyse harmonique), fut-il intrigué quand il entendit parler de petites ondes qui décomposaient un signal à la fois en temps et en fréquence. Les ondelettes seraient-elles l'équivalent d'une partition pour un signal, indiquant non seulement quelles notes (quelles fréquences) on doit jouer, mais aussi à quel moment on doit les jouer?

Parler aux païens

«J'ai commencé à travailler avec les ondelettes presque par accident, raconte Meyer. J'étais professeur à Polytechnique, où les mathématiciens partageaient une photocopieuse avec le département de physique théorique. Le directeur de ce département aime tout lire, tout savoir ; il est toujours en train de photocopier des articles. Au lieu de m'exaspérer quand je devais attendre, je bavardais avec lui, pendant qu'il faisait ses copies.

«Un jour, au printemps de 1985, il m'a montré l'article d'un collègue marseillais, Alex Grossmann, et m'a demandé mon avis. Il évoquait une technique mathématique intéressante de traitement du signal. J'ai pris le train pour Marseille et j'ai commencé à travailler avec Grossmann.»

Souvent, les mathématiques pures viennent en premier et trouvent par la suite des applications, mais ce n'était pas le cas des ondelettes, explique Meyer. «Ce n'était pas un sujet imposé par les mathématiciens ; il venait des ingénieurs. Les mathématiciens l'ont nettoyé un peu, lui ont donné plus de structure, d'ordre.»

On avait bien besoin de structure et d'ordre ; les premières ondelettes sont apparues pêle-mêle, dans des disciplines différentes, et au début les chercheurs ont parfois retrouvé, sans le savoir, des résultats déjà connus. Ce genre de pagaille existe encore aujourd'hui, d'après David J. Field, un psychologue de l'Université Cornell : «J'ai parfois l'impression que les experts du traitement du signal devraient apprendre ce que nous avons découvert dans le domaine de la vision, et travailler à partir de cela». Il n'est probablement pas le seul à penser que son sujet n'est pas assez connu des chercheurs des disciplines voisines.

Tous ces chercheurs ne se rendaient pas compte qu'ils avaient une langue en commun ; en partie parce qu'ils se parlaient rarement, mais aussi parce que leurs travaux revêtaient des formes disparates. Grossmann avait parlé des ondelettes à des personnes qui étudiaient le même domaine que Meyer, mais «ils ne voyaient pas le rapport, explique-t-il. Avec Yves ce fut immédiat ; il a tout de suite compris ce qui se passait.»

Une plaisanterie courante est d'affirmer que la contribution principale des ondelettes est de permettre aux experts de tenir des conférences sur les ondelettes ; derrière cette plaisanterie se trouve une réalité : les ondelettes ont permis aux spécialistes de sujets qui s'ignoraient mutuellement de se rencontrer et de se parler dans un langage qu'ils comprenaient tous.

«Normalement les divers domaines sont plus ou moins étanches les uns des autres, remarque Grossmann. Une des principales raisons pour lesquelles tant de gens s'intéressent aux ondelettes est que ce sujet les force à quitter leur univers habituel et à parler aux païens de toutes sortes. Un individu étranger à notre petit village est païen par définition, et les gens s'étonnent : “Regardez, ils ont deux oreilles et un seul nez, exactement comme nous!” Ce constat a été agréable pour tout le monde.»

«Cela doit être faux» : les ondelettes de Morlet

Retracer l'histoire des ondelettes exige presque un travail d'archéologue. «J'ai trouvé au moins 15 racines distinctes de la théorie, quelques-unes remontant jusqu'en 1930, dit Meyer. La communauté des physiciens était intuitivement consciente de l'existence des ondelettes, depuis un article datant de 1971, de Kenneth Wilson, lauréat du prix Nobel, qui décrit la renormalisation.» En mathématiques, on employait les ondelettes sous le nom de «décompositions atomiques», pour étudier des différents espaces fonctionnels. D'autres chercheurs ont développé des ondelettes – sous le nom de «fonctions autosimilaires de Gabor» – pour modéliser le système visuel.

Néanmoins on peut prendre comme point de départ les travaux de Jean Morlet, un géophysicien travaillant pour Elf-Aquitaine qui, indépendamment, créa les ondelettes pour chercher du pétrole sous terre. Elles n'ont d'ailleurs jamais été utilisées pour cela : «Il y a eu de petits essais et puis cela s'est arrêté. Certains étaient contre, d'autres étaient pour, et puis il n'y avait pas de fric…» raconte Morlet, aujourd'hui en retraite.

La méthode standard de détection du pétrole sous terre, introduite dans les années 1960, consiste à envoyer des vibrations ou des impulsions dans la terre et à analyser les échos (réflexions directes ou rétrodiffusion). De cette manière, on tente de déterminer la profondeur des diverses couches, leur épaisseur et leur constitution. Les fréquences de ces échos sont liées à l'épaisseur des couches sous terre, les hautes fréquences correspondant grossièrement aux couches minces. «On a des centaines de couches, explique Morlet. Tous les signaux de réflexion associés aux différentes couches interfèrent entre eux. C'est un affreux mélange. Ce sont ces différents signaux que l'on cherche à séparer.»

Pour extraire de l'information de cet enchevêtrement d'échos, on utilisait l'analyse de Fourier et des ordinateurs de plus en plus puissants. On a ensuite utilisé de larges fenêtres ici et là sur le signal, puis, à mesure que le prix de calcul baissait, des fenêtres plus rapprochées, puis chevauchantes ; «mais on est arrivé à une limite où, quelle que soit la méthode, on n'obtenait pas de meilleurs résultats, confie Morlet. On cherchait une définition locale plus fine ; en particulier, on voulait accéder à des informations sur des couches de différentes épaisseurs.»

Pour ce faire, Morlet s'est inspiré, vers 1975, de l'analyse de Fourier à fenêtre proposée par Gabor quelque 30 ans plus tôt. Malheureusement cette représentation demeure imprécise sur le temps dans les hautes fréquences (à moins de prendre une fenêtre très étroite, mais on perd alors toute information sur les fréquences plus basses). Elle présente un autre défaut sérieux : à l'inverse de la transformation de Fourier classique, elle ne procure aucune méthode numérique de reconstruction du signal à partir de la transformée.

Morlet choisit une autre approche. Au lieu de garder fixe la taille de la fenêtre et de varier le nombre d'oscillations à l'intérieur de cette fenêtre, il fit l'inverse : il garda constant le nombre d'oscillations et fit varier la taille de la fenêtre, l'étirant ou la comprimant comme un accordéon (voir la figure 7). Étirer la fenêtre a pour effet d'étirer les oscillations, donc de baisser leur «fréquence» ; la comprimer a pour effet de comprimer les oscillations, donc de produire des fréquences plus hautes. Morlet pouvait alors localiser les hautes fréquences, avec les petites fenêtres, et étudier les basses fréquences, avec les fenêtres plus larges.

Puisque ces nouvelles fonctions étaient toutes de forme semblable, il les nomma «ondelettes de forme constante» pour les distinguer à la fois des fonctions de Gabor (qu'il appelait «ondelettes de Gabor») et des «ondelettes» utilisées en géophysique, qui sont les signaux envoyés dans le sol.

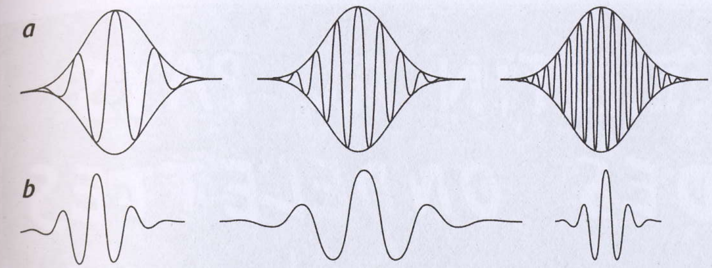
A partir de simulations sur un petit calculateur de bureau, Morlet créa alors des méthodes empiriques pour décomposer un signal en ondelettes, et le reconstruire. Toutefois, quand il montra ses résultats à ses collègues, ceux-ci prétendirent qu'ils étaient faux : «si c'était vrai, cela se saurait depuis longtemps.» En 1981, il demanda à Roger Balian, un physicien de la même promotion que lui à l'École Polytechnique, de l'aider à corriger son premier article sur les ondelettes. Balian lui a répondu : «Je suis un spécialiste de l'interprétation temps-fréquence, mais je connais quelqu'un qui est meilleur spécialiste que moi», et il l'a envoyé vers Alex Grossmann.

L'erreur est nulle…

«On a envoyé Jean me voir parce que mon domaine d'étude est la mécanique quantique, explique Grossmann. Dans les deux cas, la mécanique quantique et le traitement du signal, on utilise en permanence la transformation de Fourier – mais il faut garder en tête les informations fournies par les deux versants de la transformation.

«Quand Jean est arrivé, il avait une recette, et cette recette marchait. Mais on ne savait pas si ces résultats numériques étaient vrais en général, ou, s'ils étaient des approximations, dans quelles conditions ils l'étaient – rien de tout ceci n'était clair.» Morlet et Grossmann ont travaillé ensemble durant une année pour répondre à ces questions.

Au cours de ce travail, ils firent un grand nombre d'expériences avec des micro-ordinateurs. «Une des multiples raisons pour lesquelles ces méthodes n'ont pas été élaborées plus tôt, est que ce n'est qu'à cette époque qu'il est devenu possible, pour les gens qui ne passaient par leur vie à travailler avec des

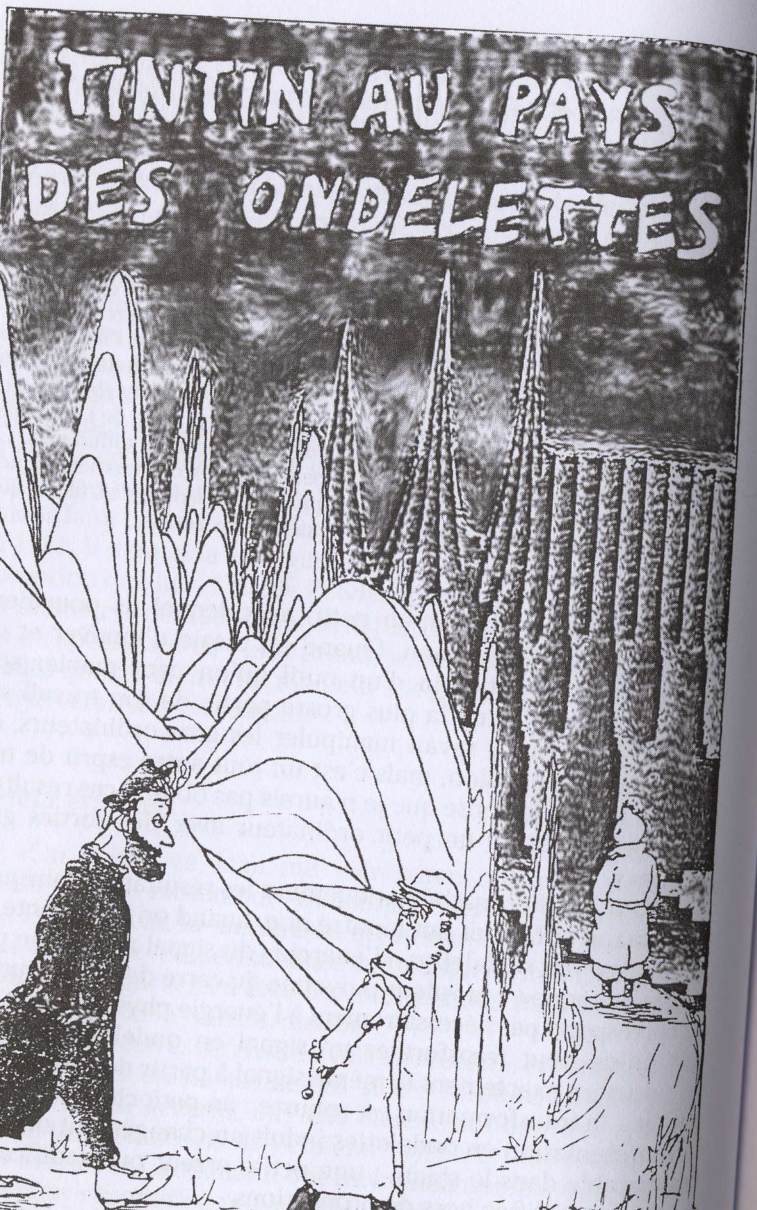


7. Dans l'analyse de Fourier à fenêtre *(a)*, la taille de la fenêtre est fixe et le nombre d'oscillations varie. Une petite fenêtre est «aveugle» aux basses fréquences, trop grandes pour y entrer ; dans une fenêtre trop large, l'information sur les variations rapides est noyée dans l'information concernant la totalité de l'intervalle contenu dans la fenêtre. Dans l'analyse en ondelettes *(b)*, on comprime ou étire une «ondelettes mère» *(à gauche)* selon la taille de l'intervalle qu'on veut étudier ; on analyse ainsi le signal à des échelles différentes. La transformation en ondelettes est parfois appelée «microscope mathématique» : les ondelettes larges donnent une image approximative du signal, tandis que les ondelettes étroites permettent de «zoomer» sur les détails.

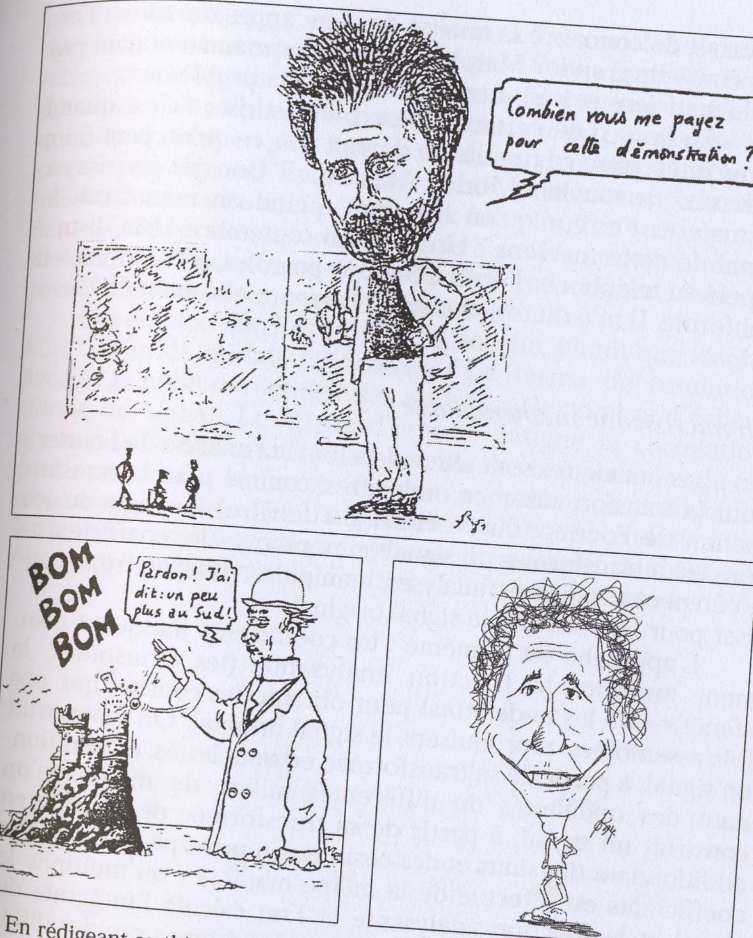
ordinateurs, d'en obtenir un petit, avec lequel ils pouvaient jouer, explique Grossmann. Quand on essaie d'innover et de comprendre, on a besoin d'un outil qu'on peut manier soi-même. Jean a effectué la plus grosse partie de son travail sur son PC. Bien sûr, il savait manipuler les gros ordinateurs, en raison de sa profession, mais c'est un tout autre esprit de travail. De même, je pense que je n'aurais pas obtenu ces résultats si je n'avais pas eu un petit ordinateur avec des sorties graphiques.»

Pour justifier mathématiquement les résultats empiriques, Grossmann et Morlet ont montré que, quand on représente un signal avec des ondelettes, «l'énergie» du signal ne change pas. (Cette «énergie» – la valeur moyenne du carré de l'amplitude – ne correspond pas nécessairement à l'énergie physique.) Il s'ensuit qu'on peut transformer un signal en ondelettes et puis reconstruire exactement le même signal à partir des ondelettes. En plus, la transformation est robuste : un petit changement de la représentation en ondelettes induit un changement de taille comparable dans le signal ; une petite erreur ou modification n'est pas amplifiée hors de proportions.

La méthode de reconstruction était toutefois lourde. A l'opposé de la transformation de Fourier, qui transforme un signal à une variable (le temps ou l'espace) en une autre fonction à une variable (la fréquence), la transformation par ondelettes produit une transformée à deux variables, temps et fré-



Une aventure palpitante du sympathique reporter accompagné du fidèle capitaine MEYER et de l'ineffable Professeur GROSSMANN...



8. En rédigeant sa thèse, Olivier Rioul a dessiné quelques uns des protagonistes de la «saga des ondelettes» : le capitaine Meyer et le professeur Grossmann. Plus récemment, il a dessiné Stéphane Mallat *(en bas à droite)* qui, on le verra au chapitre 3, a élaboré avec Yves Meyer un algorithme de transformation en ondelettes rapide. (Avec l'aimable autorisation de O. Rioul)

quence. La reconstruction utilisait alors une intégrale double et était assez pénible. Toutefois Morlet et Grossmann savaient – et l'avaient mentionné dans plusieurs articles – qu'ils pouvaient aussi faire une reconstruction «approximative» par une intégrale simple.

«Du point de vue des applications pratiques, le prix n'est pas du tout le même : dans un cas, il faut payer, dans l'autre, la reconstruction est presque gratuite», commente Morlet. Il importait de connaître la qualité de cette approximation : l'erreur était-elle grande? Mais Morlet et Grossmann n'étaient pas mathématiciens et hésitaient à s'attaquer au problème.

«Au bout d'un certain temps, on s'est dit : "c'est quand même intéressant ce truc-là, on devrait voir ce qu'on peut faire là-dessus", se souvient Morlet. Alex a dit : "Bon, je vais essayer de majorer l'erreur qu'on introduit quand on reconstruit le signal de cette manière." Un jour, en septembre 1984, il m'a appelé au téléphone. J'étais à San Diego et lui, à Pasadena, en Californie. Il m'a dit : "J'ai calculé l'erreur : elle est nulle!"»

Un microscope mathématique

Les ondelettes sont une extension de l'analyse de Fourier ; pour la transformation en ondelettes, comme pour la transformation de Fourier (ou de Fourier à fenêtre), la règle du jeu consiste à transformer un signal en nombres – les coefficients – qu'on peut enregistrer, analyser, manipuler, transmettre, ou utiliser pour reconstruire le signal original.

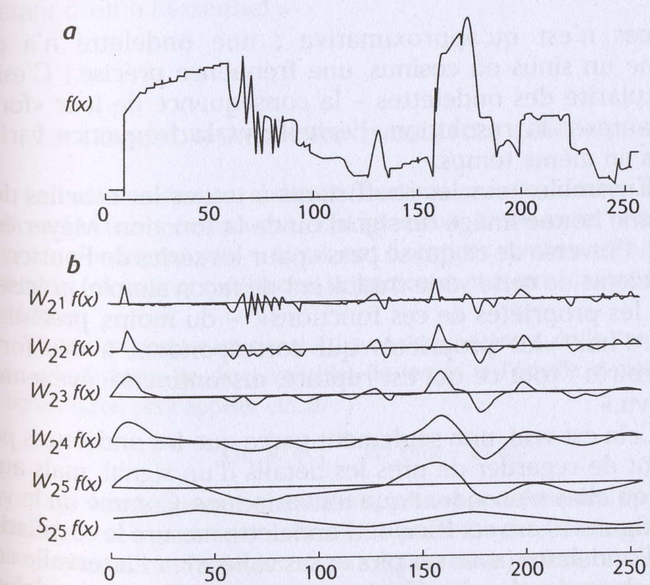
L'approche est la même : les coefficients indiquent comment modifier la fonction analysante (les sinusoïdes, la «fenêtre» ou les ondelettes) pour obtenir des courbes qui, une fois assemblées, reproduisent le signal original. On reconstruit un signal, à partir de sa transformée en ondelettes, en additionnant des ondelettes de différentes tailles, de même qu'on construit un signal, à partir de sa transformée de Fourier, en additionnant des sinus et des cosinus. En principe, le calcul des coefficients est effectué de la même manière : on multiplie le signal et la fonction analysante et l'on calcule l'intégrale du produit. (En pratique on se sert des algorithmes rapides différents.) Morlet a même produit ses ondelettes à partir de la fonction gaussienne (en forme de cloche) utilisée par Gabor dans l'analyse de Fourier à fenêtre.

Toutefois le fait de comprimer ou étirer les ondelettes pour modifier leur fréquence a tout changé. Les ondelettes s'adaptent automatiquement aux différentes composantes du signal : elles utilisent une fenêtre étroite pour regarder les composantes transitoires de haute fréquence et une fenêtre large pour regarder les composantes de longue durée, de basse fréquence.

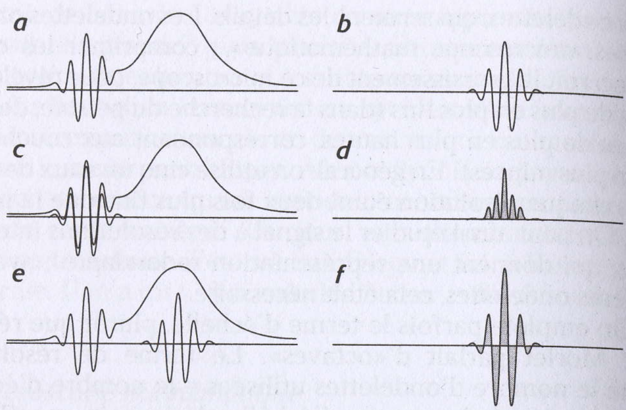
Cette procédure s'appelle la multirésolution. On examine le signal à résolution grossière, à l'aide d'ondelettes larges et d'un petit nombre de coefficients, pour en tracer l'ébauche ; on l'analyse aux résolutions fines, en utilisant un grand nombre de

petites ondelettes, qui scrutent les détails. Les ondelettes ont été appelées «microscope mathématique» : comprimer les ondelettes accroît le grossissement de ce microscope, pour révéler les détails de plus en plus fins (dans la recherche du pétrole, des fréquences de plus en plus hautes, correspondant aux couches de plus en plus minces). En général, on utilise cinq niveaux de résolution, chaque résolution étant deux fois plus fine que la précédente. On peut aussi étudier le signal à des résolutions intermédiaires, qui donnent une représentation redondante ; avec les premières ondelettes, cela était nécessaire.

On emploie parfois le terme d'échelle, plutôt que résolution ; Morlet parlait d'«octaves». Le terme de résolution évoque le nombre d'ondelettes utilisées – le nombre d'échantillons du signal. Le terme d'échelle désigne la corrélation entre la taille de l'ondelette et la taille des composantes qu'on peut voir. Enfin le terme d'octave rappelle que doubler la résolution a pour effet d'augmenter la fréquence des ondelettes pour voir les composantes de fréquences doubles. (A l'opposé de l'analyse de Fourier, l'information sur les fré-



9. Une transformée en ondelettes. Le signal initial *(a)* est transformé en ondelettes sur cinq échelles *(b)*. La résolution la plus fine, donnant le plus de détails, est la première en haut. En bas se trouve le graphe des plus basses fréquences restantes. (Avec l'aimable autorisation de S. Mallat)



10. La transformation en ondelettes d'un signal *(a)* compare une ondelette *(b)* aux divers morceaux du signal *(c et e)*. Le produit d'un morceau du signal et de l'ondelette donne une courbe *(d et f)* ; l'aire située sous cette courbe est égale au coefficient d'ondelette *(en grisé)*. Les morceaux du signal qui ressemblent à l'ondelette donnent de gros coefficients *(c et d)*, car le produit de l'ondelette et du signal est positif. Les morceaux qui changent lentement donnent de petits coefficients *(e et f)*, car les valeurs négatives compensent presque les valeurs positives. Ainsi les ondelettes font ressortir les variations du signal.

quences n'est qu'approximative ; une ondelette n'a pas, comme un sinus ou cosinus, une fréquence précise.) C'est la particularité des ondelettes – la conséquence de leur «forme constante» : la résolution, l'échelle et la fréquence varient toutes en même temps.

Ensemble, tous les coefficients à toutes les échelles donnent une bonne image du signal ou de la fonction. Meyer écrivit : «à l'inverse de ce qui se passe pour les séries de Fourier, les coefficients de cette série traduisent de façon simple, précise et fidèle les propriétés de ces fonctions»[5] – du moins, précise-t-il aujourd'hui, «les propriétés qui correspondent à des fortes transitoires : tout ce qui est rupture, discontinuité, événement imprévu.»

Cela est vrai, non seulement parce que les ondelettes permettent de regarder de près les détails d'un signal, mais aussi parce qu'elles n'encodent que les variations. Comme on le voit sur la figure 10, un coefficient d'ondelette mesure la corrélation entre l'ondelette (avec ses pics et ses vallées) et l'intervalle correspondant du signal. «On joue avec la taille de l'ondelette pour attraper le rythme du signal», dit Meyer.

Un intervalle constant du signal donne un coefficient nul. Par définition, une ondelette a une intégrale nulle – la moitié de l'aire qu'elle entoure est positive, l'autre moitié est négative. Multiplier l'ondelette par une constante change la partie positive et la partie négative également, et l'intégrale reste nulle. On peut aussi construire des ondelettes qui donnent des coefficients nuls pour les fonctions linéaires et quadratiques, et même les polynômes de degrés plus hauts (le nombre de *moments nuls*[6] d'une ondelette détermine à quoi elle est «aveugle»).

«L'analyse par ondelettes est une manière d'exprimer notre sensibilité aux variations, explique Meyer. C'est comme notre réponse à la vitesse. Le corps humain ne répond qu'aux accélérations, pas à la vitesse» ; on se sent au repos dans un train ou un avion, tant que la vitesse est constante.

Cette caractéristique permet aux ondelettes de comprimer l'information. Ainsi un signal qui contient 100 000 valeurs peut être représenté par 10 000 coefficients d'ondelettes ; ceux qui sont nuls sont automatiquement oubliés. Comme le montrent les figures 9 et 10, elle leur permet également de souligner les variations imprévisibles – les pics d'un signal, ou les contours d'une image. L'analyse par ondelettes constitue, dans les mots de Meyer, «une lecture intelligente» de ces sortes de signaux, «sautant droit à l'essentiel.»[7]

La transformation en ondelettes continue

La transformation en ondelettes continue consiste à créer, à partir d'une fonction mère ψ («psi»), qui ressemble à une petite onde, une famille d'ondelettes $\psi(ax + b)$, où a et b sont des nombres réels : a sert à *dilater* (comprimer ou étendre) la fonction ψ, et b sert à la *translater* (la déplacer).

Quand on analyse un signal $f(t)$ avec ces ondelettes, on le transforme en une fonction de deux variables (le temps et l'échelle d'analyse du signal) qu'on peut appeler $c(a, b)$:

$$c(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \psi(at + b)\, dt.$$

Cette transformation est, en théorie, infiniment redondante. Elle révèle toutefois certaines caractéristiques des signaux. De plus, cette redondance engendre moins d'obstacles qu'on ne pourrait le craindre ; des chercheurs ont élaboré des méthodes pour extraire rapidement l'information essentielle de ces transformées redondantes.

L'une de ces méthodes réduit une transformée redondante à son «squelette». Quand on effectue une transformée en ondelettes continue de certains signaux, l'information essentielle du signal est contenue dans des courbes, ou «arêtes». Selon Bruno Torrésani, chercheur au CNRS, à l'Université d'Aix-Marseille, les arêtes sont constituées des points du plan temps-échelle «où la fréquence naturelle de l'ondelette translatée et dilatée coïncide avec la fréquence, ou une des fréquences, locale du signal». Ces arêtes forment le «squelette» de la transformée.

Torrésani, en collaboration avec Richard Kronland-Martinet, de Marseille, et Bernard Escudié, de Lyon, a inventé des algorithmes qui exploitent la redondance d'une transformée continue pour calculer rapidement ces arêtes. «On a besoin, explique Torrésani, de suivre les courbes, ou arêtes, en continu»[8]. D'autres chercheurs à Marseille ont travaillé sur cette méthode : Nathalie Delprat, Philippe Guillemain et Philippe Tchamitchian l'ont appliquée à la musique, et Caroline Gonnet a étudié, avec Torrésani, les squelettes des images[9]. Dans un projet franco-italien, nommé VIRGO, Jean-Michel Innocent tente d'appliquer la méthode des squelettes à la détection des ondes gravitationnelles émises, par exemple, par une étoile binaire qui s'effondre. Les ondes gravitationnelles, prédites par la théorie de la relativité générale, n'ont jamais été observées. «La grande difficulté est de séparer le signal du bruit de fond, qui est énorme dans ce cas», commente Torrésani, qui cherche également une solution au problème des squelettes en présence d'un bruit fort.

La méthode des squelettes est adaptée aux signaux qui ont une bande de fréquences localement étroite – certains signaux de parole, par exemple. Dans ce cas, on peut associer, à chaque instant du signal, des fréquences (voire une fréquence) bien définies. Il n'en va pas de même pour les signaux qui contiennent des singularités – des points ou le signal varie brusquement, comme les bords des images. Pour ces signaux, Stéphane Mallat et Wen Liang Hwang, du *Courant Institute of Mathematical Sciences*, à New York, ont obtenu un autre moyen de réduire une transformée redondante[10] ; ils calculent les valeurs maximales d'une transformée – les *maxima d'ondelettes*. Mallat a également mis au point, avec Sifen Zhong, des méthodes de reconstruction d'un signal à partir de ses maxima d'ondelettes[11].

Les transformations discrètes

Dans une transformation en ondelettes discrète, on ne translate et dilate l'ondelette que selon des valeurs discrètes. Habituellement le facteur de dilatation a est une puissance de 2 (dyadique) : les ondelettes sont de la forme $\psi(2^k t + l)$, où k et l sont des nombres entiers.

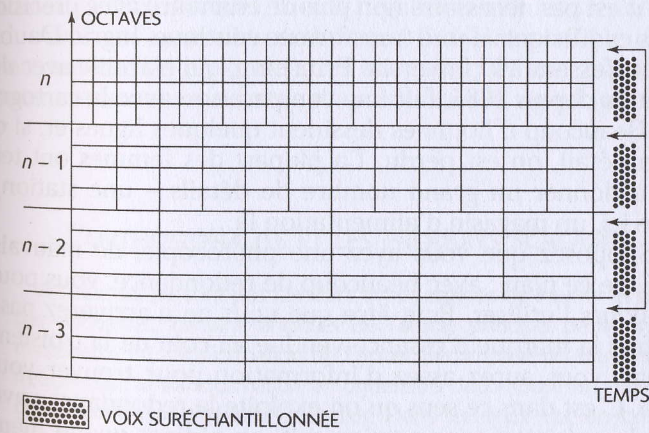
Les ondelettes orthogonales (voir *L'Orthogonalité et les produits scalaires*, page 75) sont des ondelettes discrètes particulières. Elles sont *a priori* bien plus difficiles à construire, mais elles fournissent une représentation sans redondance et se prêtent aisément aux algorithmes rapides.

Tacite contre Cicéron : à la recherche de l'orthogonalité

Quand, en 1985, Yves Meyer prit le train vers Marseille pour rencontrer Alex Grossmann, la multirésolution existait, mais le calcul des coefficients d'ondelettes était lent et pénible ; de plus, la transformation n'était pas concise. Pour reconstruire un signal à partir de la transformée, on devait l'analyser non seulement aux résolutions doubles, mais aussi à toutes les résolutions intermédiaires. Morlet et Grossmann avaient établi une représentation avec trois ou quatre «voix» entre les «octaves», qui introduisait peu d'erreurs dans la reconstruction du signal.

Toutefois, pour obtenir une reconstruction parfaite du signal, on devait utiliser la transformation en ondelettes continue, c'est-à-dire étudier le signal à toutes les résolutions possibles, et passer les ondelettes sur toutes les valeurs possibles.

Imaginez une seule ondelette glissant lentement le long du signal, tandis qu'on calcule un nombre infini de coefficients. Après cette tâche interminable, on comprime légèrement



11. Dans l'analyse par ondelettes, chaque coefficient d'ondelette calculé équivaut à un échantillon du signal. Avec ses ondelettes de forme constante, Morlet doublait le nombre d'échantillons d'un signal (doublait le nombre de pavés) chaque fois qu'il passait d'une *octave* (aujourd'hui on dirait plutôt *échelle* ou *résolution*) à l'octave supérieure. Il prenait aussi des échantillons entre les octaves. Ces voix intermédiaires étaient sur-échantillonnées, par rapport à ce qu'exige le théorème d'échantillonnage de Shannon. Avec les ondelettes orthogonales, il est possible de construire une représentation parfaite du signal avec un échantillonnage *critique*, c'est-à-dire avec le nombre minimal d'échantillons exigé par le théorème d'échantillonnage. (Avec l'aimable autorisation de J. Morlet)

l'ondelette et on recommence… En théorie, la tâche est infinie. En pratique, «infini peut être 10 000, ce qui n'est pas trop mal», remarque Grossmann. Quand on parle d'une transformée continue faite avec des ondelettes, c'est souvent un abus de langage : on travaille avec des chiffres discrets, échantillonnant le signal un nombre fini de fois.

Toutefois une transformée continue est prodigue. Ces ondelettes empiètent l'une sur l'autre, pour que la plupart de l'information encodée par une soit aussi encodée par ses voisines. (Le signal est *sur-échantillonné* ; il y a plus d'échantillons que ne l'exige le théorème d'échantillonnage.). En général, la transformée est redondante par un facteur dix, affirme Meyer : «Une transformée continue est cicéronienne, où tout est redit à peu près dix fois.»

Cette redondance peut être un avantage. Avec une représentation continue, l'origine précise de l'encodage du signal n'a pas grande importance ; les coefficients ne changent pas si on déplace cette origine (les mathématiciens qualifient une telle représentation d'*invariante par translation*). Il s'ensuit qu'il est plus facile d'analyser les données ou de reconnaître les motifs.

Il n'est pas nécessaire non plus de connaître avec précision tous les coefficients d'une transformée continue. Ingrid Daubechies, professeur à l'Université Princeton, qui travaille avec des ondelettes depuis 1985, fait une comparaison avec la cartographie. «Beaucoup d'hommes dessinent quelques lignes et, si on rate un détail, on est perdu. La plupart des femmes ont tendance à donner un grand nombre de détails – une station à essence ici, un magasin d'alimentation là…

«Supposez que vous ayez une photocopie, de mauvaise qualité, de ce plan ; avec beaucoup de redondance, vous pourrez toujours l'utiliser. Peut-être que vous ne n'arriverez pas à déchiffrer la marque d'essence vendue au coin de la troisième rue, mais vous aurez assez d'information pour trouver votre chemin. C'est dans ce sens qu'on exploite la redondance : avec moins de précision sur ce qu'on sait, on obtient quand même une reconstruction précise.»

Toutefois, si l'on veut comprimer l'information pour la transmettre, l'analyser ou la stocker, la redondance coûte cher. On fait alors appel à une transformée orthogonale. Cette transformée fournit une reconstruction parfaite du signal initial, tout en évitant la redondance au cours de l'encodage (voir *L'orthogonalité et les produits scalaires*, page 75) ; toute l'information du signal n'est encodée qu'une fois, sans répétition : Tacite, commente Meyer, par rapport à Cicéron.

A l'époque, Meyer ne pensait pas aux applications telles que la compression d'information ; en mathématicien pur qui se respecte, il était épris des mathématiques des ondelettes. Quand on se restreint aux transformations continues, presque n'importe quelle fonction peut s'attribuer le titre d'ondelette, pourvu qu'elle ait une intégrale nulle. La situation est toute autre pour les ondelettes orthogonales ; savoir si elles existaient était déjà une question intéressante (à part la fonction très saccadée de Haar ; voir *La multirésolution*, page 95).

En 1981, Balian avait démontré qu'il n'existe pas de représentation orthogonale pour l'analyse de Fourier à fenêtre gaussienne, ou plus généralement, avec n'importe quelle fenêtre régulière et localisée[12]. Meyer était convaincu que les ondelettes orthogonales n'existaient pas non plus – précisément, les ondelettes orthogonales infiniment dérivables (parfaitement lisses) qui s'approchent rapidement de zéro quand la variable tend vers l'infini. Il tenta de le démontrer et échoua : durant l'été 1985, il construisit justement le type d'ondelette, qui, selon lui, n'existait pas. (Il observa plus tard qu'un mathématicien suédois, J. O. Strömberg, avait créé, quatre ans plus tôt, d'autres ondelettes orthogonales, moins régulières que les siennes[13].)

Avec ces nouvelles ondelettes, il devint possible de faire une transformée en ondelettes économique, une transformée contenant le même nombre de points que le signal lui-même.

L'orthogonalité et les produits scalaires

A ceux qui ne sont pas familiers avec l'analyse de Fourier et la théorie des ondelettes, certains énoncés de l'article principal peuvent paraître mystérieux. La transformation de Fourier décompose un signal selon ses fréquences ; la transformation en ondelettes décompose un signal en ses composants aux différentes échelles. Dans les deux cas, on calcule des intégrales : on multiplie le signal par la fonction analysante (sinusoïde ou ondelette) et on intègre.

Comment ces intégrales mènent-elles à une décomposition du signal? Consultez n'importe quel ouvrage sur le traitement du signal ou sur les ondelettes : on y raconte que le calcul des coefficients de Fourier ou d'ondelettes consiste à prendre le produit scalaire du signal et de la fonction analysante. (En anglais les trois termes *scalar product*, *dot product* et *inner product* sont synonymes.) Si la technique de calcul est l'intégration, pourquoi évoquer des produits scalaires?

Nous avons aussi parlé des ondelettes orthogonales ; elles sont plus dif-