Tutorat 4 : Géométrie différentielle

Frédéric Chevy – chevy@lkb.ens.fr

http://www.lkb.ens.fr/∼chevy/Tutorat/Tut.html

On considère la sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon unité que l'on dote d'un système de coordonnées sphériques (θ,ϕ). Soit A et B deux points de $\mathcal{S}$. Un trajet différentiable reliant A à B est décrit par un couple d'applications $\mathcal{C}^1$ $(\theta(t),\phi(t))$, avec $t \in [0,1]$.

On nomme géodésique de la sphère le chemin le plus court sur $\mathcal{S}$ reliant A à B.

1. Montrer que la longueur L d'un chemin liant A à B s'écrit

$$L = \int_0^1 \left(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right)^{1/2} dt.$$

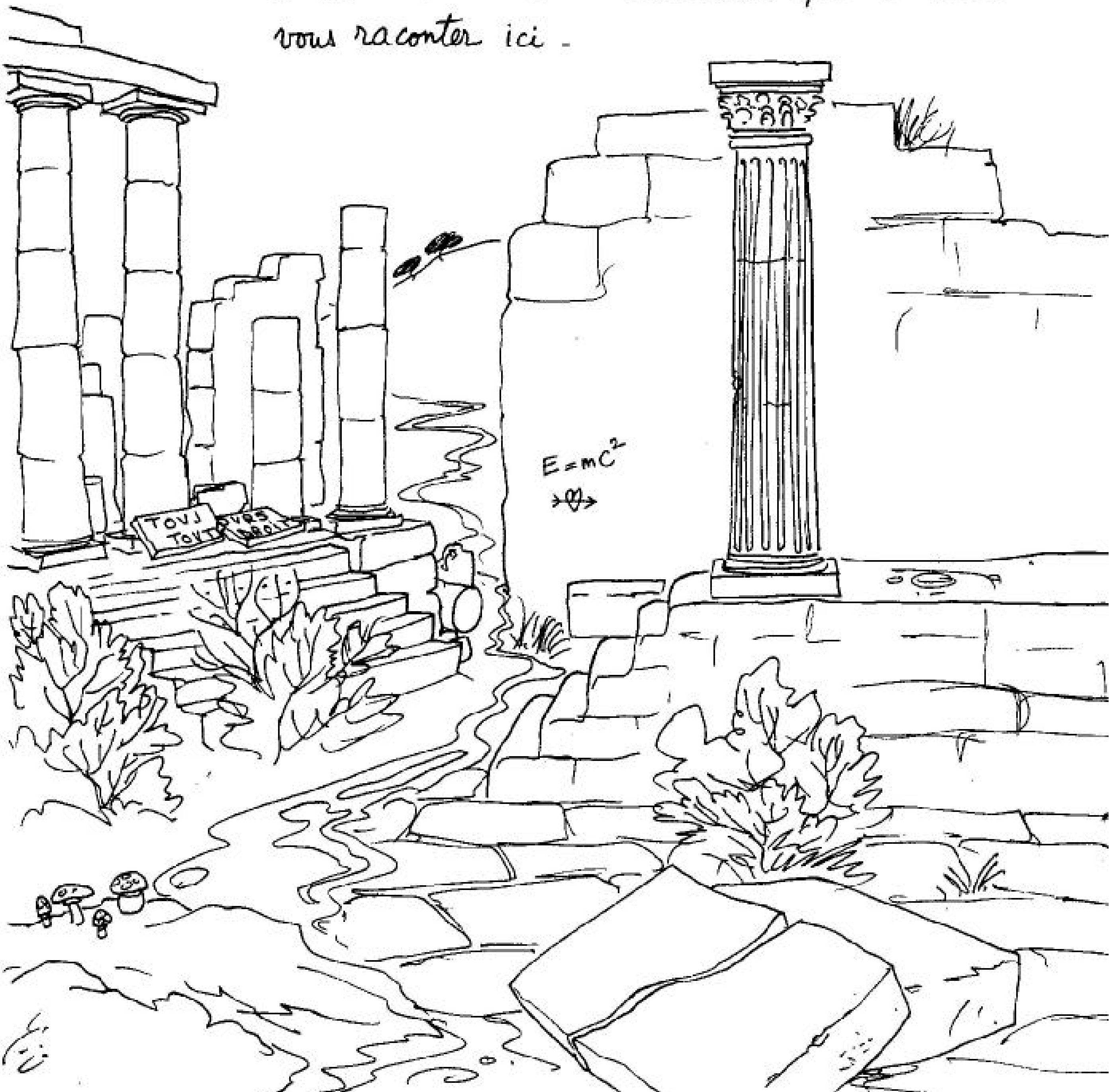
2. Montrer que si t est une abscisse curviligne, une géodésique satisfait les équations d'Euler-Lagrange

$$\ddot{\theta} = \sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2$$
$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\phi}\sin^2(\theta)\right) = 0$$

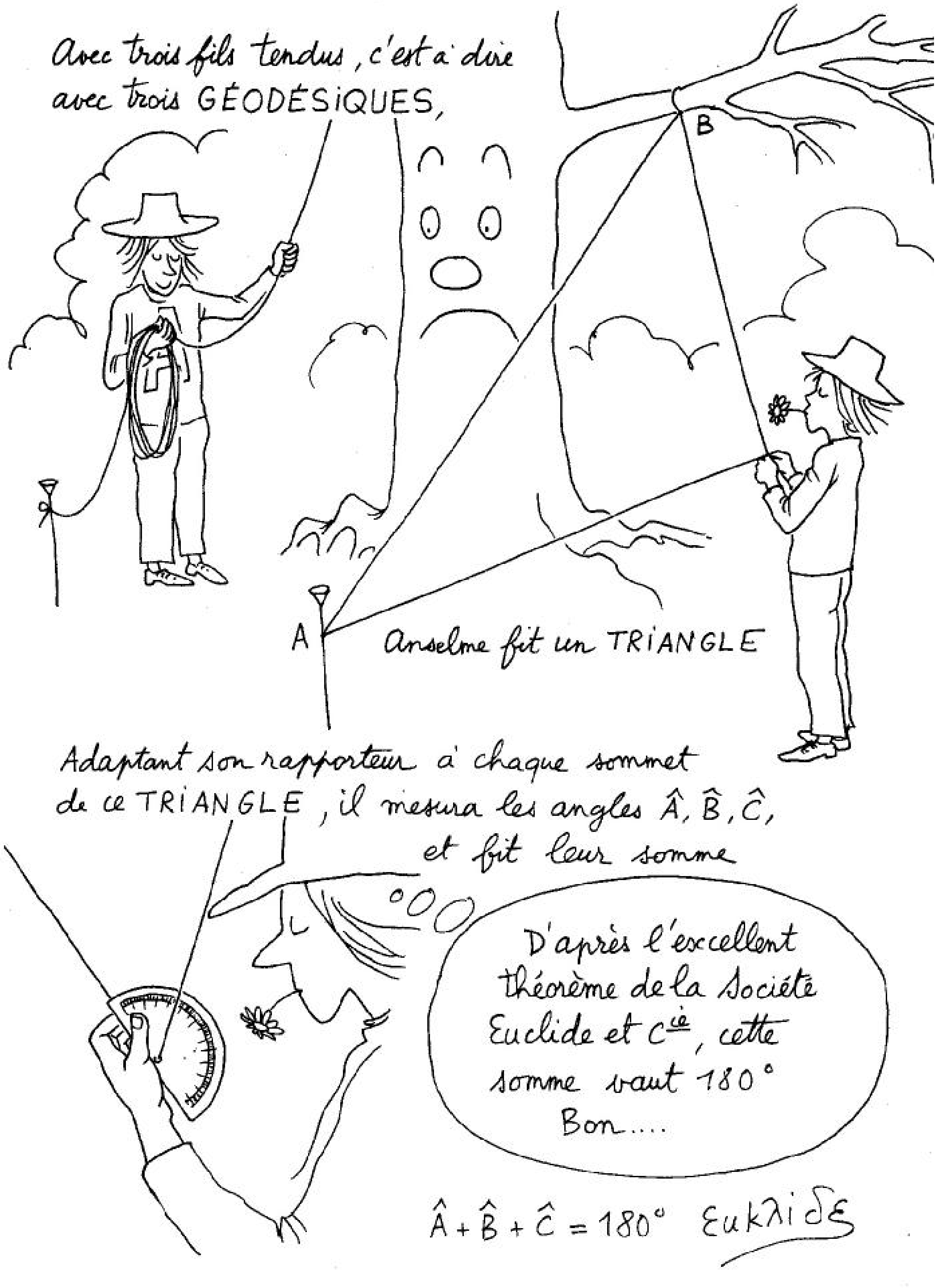
3. Montrer que l'on peut toujours choisir les axes de coordonnées de façon à ce que A occupe le pôle Nord $\theta = 0$ et que B soit dans le plan $\phi = 0$. En déduire l'équation $(\theta(t),\phi(t))$ de la géodésique
4. À l'aide des questions précédentes, expliquer les observations d'Anselme Lanturlu.

La Société Euclide et Cie naquit à Alexandrie au troisième siècle avant Jésus-Christ. Pendant deux mille deux cents ans les affaires prospérèrent. Les produits étaient appréciés et la clientèle satisfaite et fidèle.

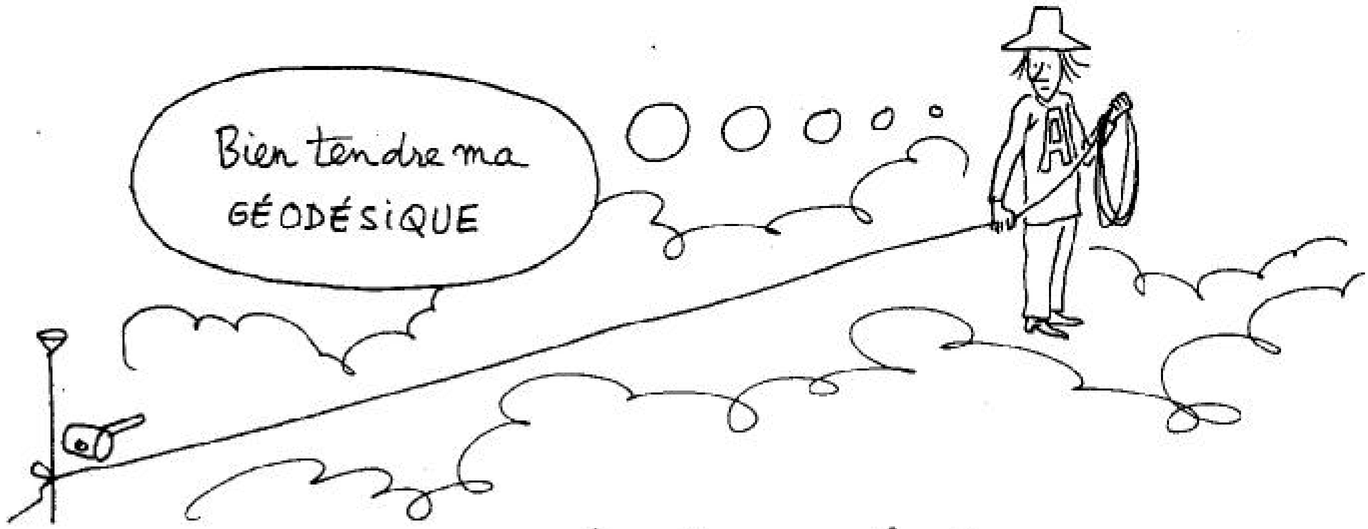
Mais, peu à peu, les goûts des clients changèrent.
Certains, jadis inconditionnels de la marque,
à la suite de curieuses expériences, se demandèrent :
« Euclide, est-ce vraiment, partout et pour tout,
ce qu'il y a de mieux ? »
C'est l'histoire de l'un d'eux que nous allons
vous raconter ici.



PROLOGUE : Un jour, anselme Lanturlu décida de tendre une ficelle entre deux piquets :


Avec trois fils tendus, c'est à dire avec trois GÉODÉSIQUES,
B
A
Anselme fit un TRIANGLE
Adaptant son rapporteur à chaque sommet de ce TRIANGLE, il mesura les angles Â, B̂, Ĉ, et fit leur somme
D'après l'excellent théorème de la Société Euclide et Cie, cette somme vaut 180°
Bon....
Â + B̂ + Ĉ = 180°
ευκλιδε

Le monde où vivait Anselme était nébuleux en diable. On s'y serait mouché avec le nez d'un autre.

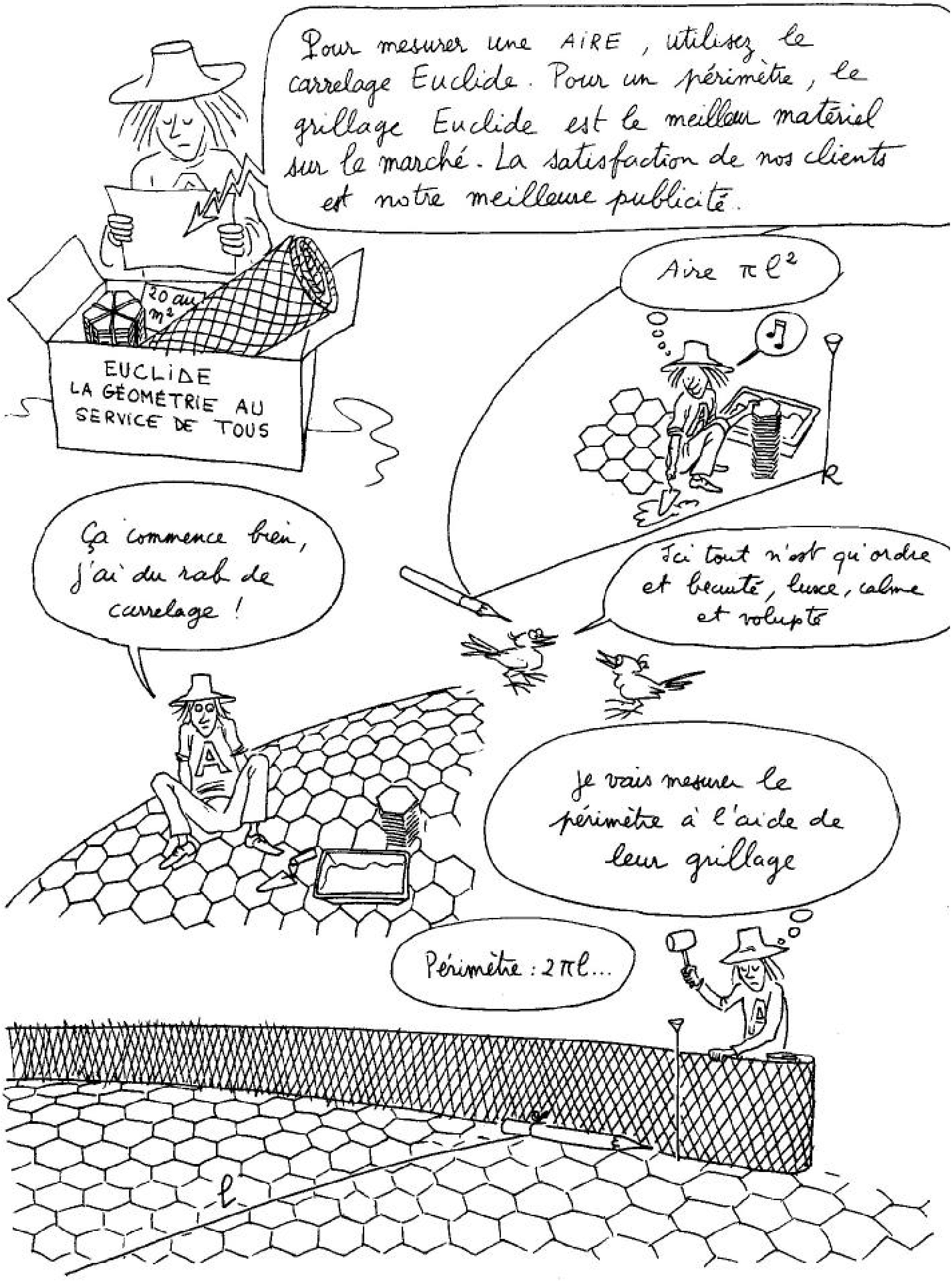


Anselme marcha longtemps, longtemps...
Derrière lui sa ficelle se déroulait, si bien tendue, qu'il se moquait bien des incertitudes de sa marche dans la brume : il fabriquait une impeccable GÉODÉSIQUE.

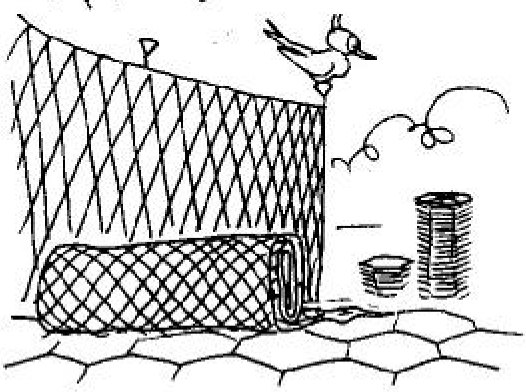

mais, je ne sais si vous l'avez remarqué, il y a des jours où tout semble aller de travers.
ça alors!
mais... c'est mon piquet!
Anselme, qui avait encore de la ficelle, décida de tirer cette affaire au clair.
Imperturbable, il continua donc à tendre sa ficelle, et poursuivit, DROIT DEVANT, plein de curiosité.
Hélas...
mais c'est encore mon piquet!
La DROITE d'Anselme se refermait!


? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?
Essayons un théorème de chez Euclide. Je vais tirer trois GÉODÉSIQUES d'égale longueur. Cela me donnera un TRIANGLE dont les trois angles doivent avoir chacun 60°; leur somme faisant 180°. C'est écrit sur la notice.
B 60 60 60 A C
$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°$
après, j'aviserai.
RATIO OMNIA VINCIT
A
A
B
Voilà mon deuxième sommet B. Plus qu'à tendre deux autres fils pour trouver le troisième
C'est beau la science
B
A
Oh, là là ! Les angles sont bien égaux, mais ils font plus de 60°.
leur somme, bien sûr, fait plus de 180° !
un problème?
C
A
•EUCLIDE
EUCLIDE
GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE
EUCLIDE !


Pourtant, en posant ma règle bien A PLAT j'ai vérifié que mes fils étaient bien DROITS
EUCLIDE
allô, la maison Euclide? Dites, j'ai des ennuis avec votre matériel.
Une seconde, je vous passe le service technique.
Des ennuis avec nos triangles? Etonnant. Pourquoi n'essayez-vous pas nos cercles? Nos clients en sont très contents.
...Un cercle est donc l'ensemble des points situés à une distance ℓ d'un point fixe.
Et vous dites: périmètre $2\pi\ell$, AIRE : $\pi\ell^2$ c'est noté.
ℓ
a votre service



Pour mesurer une AIRE, utilisez le carrelage Euclide. Pour un périmètre, le grillage Euclide est le meilleur matériel sur le marché. La satisfaction de nos clients est notre meilleure publicité.
20 au m²
EUCLIDE LA GÉOMÉTRIE AU SERVICE DE TOUS
Aire πℓ²
Ça commence bien, j'ai du rab de carrelage !
Ici tout n'est qu'ordre et beauté, luxe, calme et volupté
Je vais mesurer le périmètre à l'aide de leur grillage
Périmètre : 2πℓ...
ℓ

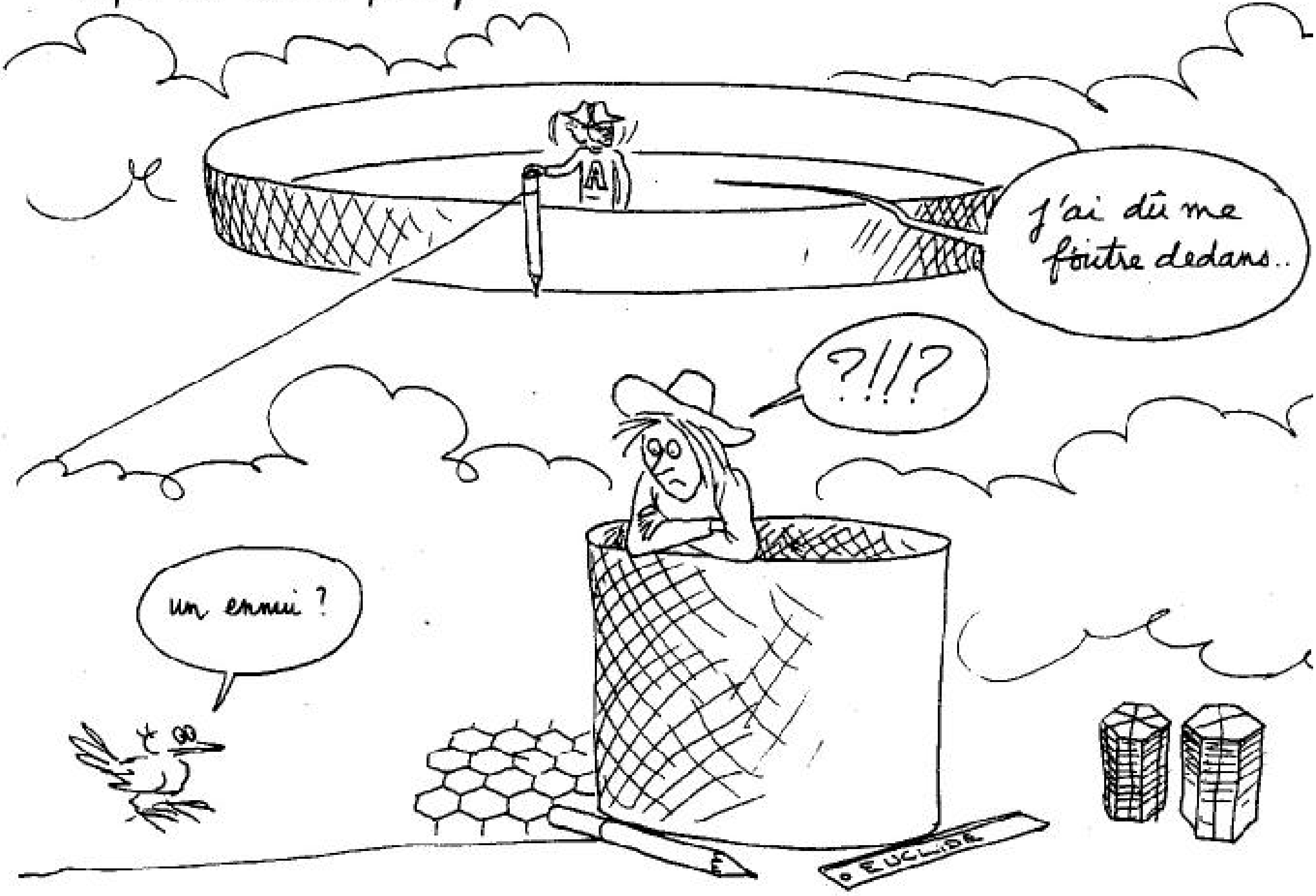


Anselme poursuivit donc son expl
en augmentant à chaque fois le r
de son cercle.

Mais les chutes se firent de plus en
importantes.


ça alors, maintenant j'ai plus de 36% de grillage en trop! et 19% de carrelage en rab! et le cercle que je trace est devenu... une DROITE!
je rêve, ou quoi?
Par l'espace! cette règle est pourtant bien DROITE!
Anselme augmente encore le rayon l, et cette fois...
EUCLIDE
La courbure de mon cercle est passée de l'autre côté
Et maintenant, quand j'AUGMENTE l, mon périmètre DIMINUE, c'est une histoire de fou!

Après un dernier pavage :



QUE S'EST-IL PASSÉ ?