Tutorat 4

Théorie classique des champs

Frédéric Chevy – chevy@lkb.ens.fr

De la même façon que pour la mécanique newtonienne, il est possible d'exprimer sous la forme d'un principe de moindre action la plupart des théories de champ *classique*[1] (électromagnétisme, gravitation etc.). Cette approche est particulièrement utile lors de l'élaboration de la version *quantique* de ces théories et est à la base de toute les théories modernes des particules élémentaires.

Soient p, t_1, t_2 trois réels. On définit $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times [t_1, t_2]$ et g_1 et g_2 deux applications $\mathcal{C}_2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de période p.
On considère l'espace $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ des fonctions f $\mathcal{C}_2$ sur $\mathcal{D}$ satisfaisant la condition de périodicité :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [t_1, t_2],\ f(x,t) = f(x+p,t).$$

On dote $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ de la norme $\|.\|$ définie par :

$$\|f\| = \sup_{\mathcal{D}} \left(|f| + |\partial_x f| + |\partial_t f| + |\partial^2_{xx} f| + |\partial^2_{xt} f| + |\partial^2_{tt} f| \right).$$

On définit par ailleurs les deux sous-espaces de $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ suivants :
• $\mathcal{P}_0(\mathcal{D})$ est l'espace vectoriel constitué des éléments f de $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ satisfaisant les conditions aux limites :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x, t_{i=1,2}) = 0$$

• $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ est l'espace affine parallèle à $\mathcal{P}_0(\mathcal{D})$ constitué des éléments f de $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ satisfaisant les conditions aux limites :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x, t_{i=1,2}) = g_{i=1,2}(x)$$

1. Soit $\mathcal{S}$ l'application de $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\mathcal{S}(f) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt' \int_0^p dx' \left[(\partial_x f)^2 - (\partial_t f)^2 \right].$$

[1] c'est-à-dire non quantiques

(a) Soient $(f, \delta f) \in \mathcal{F}(\mathcal{D}) \times \mathcal{P}_0(\mathcal{D})$. Montrer que $f + \delta f \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ puis que :

$$\mathcal{S}(f + \delta f) = \mathcal{S}(f) - \int_{t_1}^{t_2} dt' \int_{x_1}^{x_2} dx' \left[\partial^2_{xx} f - \partial^2_{tt} f\right] \delta f + \mathcal{S}(\delta f).$$

Indication : on pourra intégrer par parties et utiliser les conditions aux limites aux bords de $\mathcal{D}$.

(b) Montrer que $\mathcal{S}(\delta f) < 2(t_2 - t_1)(x_2 - x_1)||\delta f||^2$ et en déduire que $\mathcal{S}$ est différentiable en f avec :

$$D_f\mathcal{S}(\delta f) = - \int_{t_1}^{t_2} dt' \int_{x_1}^{x_2} dx' \left[\partial^2_{xx} f - \partial^2_{tt} f\right] \delta f.$$

(c) Déduire de la question précédente que $\mathcal{S}$ est stationnaire sur $\mathcal{F}$ pour f satisfaisant l'équation :

$$\partial^2_{xx} f - \partial^2_{tt} f = 0.$$

Quelle équation reconnaît-on ?

2. *Généralisation* : On considère à présent que $\mathcal{S}$ se met sous la forme :

$$\mathcal{S}(f) = \int_{t_1}^{t_2} dt' \int_{x_1}^{x_2} dx' \mathcal{L}\left(f, \partial_x f, \partial_t f, x, t\right),$$

où $\mathcal{L}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ est une fonction $\mathcal{C}_1$ définie sur $\mathbb{R}^5$.

(a) Reprendre l'étude précédente et montrer que $\mathcal{S}$ est stationnaire si f satisfait l'équation différentielle :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} - \partial_x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x f)}\right) - \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t f)}\right) = 0. \tag{1}$$

(b) *Théorème de Noether* : On suppose que $\mathcal{L}$ ne dépend pas explicitement de x ou de t, c'est-à-dire que l'on a $\mathcal{L}(f, \partial_x f, \partial_t f)$ uniquement.

i. À quelle type de symétrie peut-on associer cette propriété d'invariance ? Quelles grandeurs conservées lui sont-elles associées ?

ii. Montrer que si $\tilde{f}_{a,b}(x, t) = f(x + a, t + b)$ alors $\mathcal{S}(f) = \mathcal{S}(\tilde{f}_{a,b})$.

iii. Développer explicitement $\mathcal{S}(\tilde{f}_{a,b})$ à l'ordre 1 en a et b. En déduire que si $\mathcal{S}$ est stationnaire en f :

$$\begin{aligned}
\partial_x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x f)} \partial_x f - \mathcal{L}\right) + \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t f)} \partial_x f\right) &= 0 \\
\partial_x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x f)} \partial_t f\right) + \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t f)} \partial_t f - \mathcal{L}\right) &= 0
\end{aligned}$$

Indication : on utilisera l'équation (1).

Quel type d'équation reconnaît-on. Les écrire explicitement dans le cas de la question (1).