Tutorat 3

Géométrie différentielle

Frédéric Chevy – chevy@lkb.ens.fr

La *géométrie différentielle* s'intéresse aux propriétés géométriques des espaces "courbes" tels les surfaces de $\mathbb{R}^3$ (on parle aussi de *variété*). Dans ce cadre, on est amené à généraliser la notion de droite : on définit ainsi une géodésique d'une variétés comme étant une courbe de distance minimale reliant deux points donnés.
Ces notions furent dans un premier temps développées pour la sphère par Gauss, puis généralisées par Riemann et Lobatchevski dans le cas général. Par la suite, la géométrie différentielle prouva toute son utilité dans le cadre de la Relativité Générale (la théorie relativiste de la gravitation découverte par Einstein en 1916) où l'on montre que l'espace-temps est courbé par la présence de masses. De même qu'en optique classique où la lumière se propage en ligne droite, des photons dans un champ de pesanteur suivent les géodésiques de l'espace-temps.

1 Notion de géodésique

On considère une surface $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par deux variable x_1 et x_2. Lorsque l'on change de dx_1 et dx_2 les coordonnées d'un point $\overrightarrow{M}$ de la surface, le vecteur déplacement s'écrit de façon générique :

$$d\overrightarrow{M} = \lambda_1(x_1, x_2)\overrightarrow{u}_1(x_1, x_2)dx_1 + \lambda_2(x_1, x_2)\overrightarrow{u}_2(x_1, x_2)dx_2,$$

où les vecteurs $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ sont pris normés mais non nécessairement orthogonaux. Les λ_i sont quant à elles deux fonctions dépendant de la surface considérée.
Une courbe $\mathcal{C}$ tracée sur $\mathcal{S}$ est représentée par une application de $[0, 1]$ sur $\mathcal{S}$. On appelle *géodésique* de $\mathcal{S}$ une courbe de longueur *minimale* reliant deux points donnés A et B.

1. Montrer que la longueur L de $\mathcal{C}$ peut se mettre sous la forme :

   $$L = \int_0^1 \sqrt{g_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j}dt.$$

   où l'on a utilisé les conventions de sommation d'Einstein et où g_{ij} est une matrice symétrique 2×2 que l'on écrira en fonction des $\lambda_{i=1,2}$ et de $\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{u}_2$. g est baptisé *tenseur métrique* de la surface.

2. On pose $F(x_i, \dot{x}_i) = g_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j$. Prouver que le problème de la recherche d'une géodésique de $\mathcal{S}$ revient à minimiser :

$$\int_0^1 \sqrt{F(x_i, \dot{x}_j)}dt,$$

en maintenant $x_{1,2}(0)$ et $x_{1,2}(1)$ fixés. Montrer que les équations d'Euler-Lagrange associées s'écrivent :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)\right) + \frac{1}{2F}\frac{dF}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0.$$

3. On dit que le paramètre t est une abscisse curviligne de $\mathcal{C}$ si l'on a :

$$F(x_i, \dot{x}_i) = \lambda,$$

où λ est une constante réelle. Dans ce cas, déduire des équations d'Euler-Lagrange que :

$$g_{ki}\ddot{x}_i = \frac{1}{2}\left(\partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{jk}\right)\dot{x}_i\dot{x}_j,$$

où par concision l'on a posé $\partial_k = \partial/\partial x_k$.

4. On introduit h_{mn} matrice inverse de g_{ij}. Montrer que :

$$h_{ij}g_{jk} = \delta_{ik}$$

puis déduire de la question précédente que :

$$\ddot{x}_m = \Gamma_{m,ij}\dot{x}_i\dot{x}_j,$$

avec

$$\Gamma_{m,ij} = \frac{h_{mk}}{2}\left(\partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{jk}\right).$$

5. Montrer que les symboles de Riemann-Christoffel $\Gamma_{m,ij}$ vérifient la condition de symétrie :

$$\Gamma_{m,ij} = \Gamma_{m,ji}.$$

6. *Exemple d'application* : dans le cas où $\mathcal{S}$ est un plan, montrer que $g_{ij} = \delta_{i,j}$ et en déduire que les géodésiques sont des droites. Même question pour un cylindre. Pourquoi dit-on qu'un cylindre possède une topologie euclidienne ?

2 Géodésique de la sphère

On considère que $\mathcal{S}$ est une sphère de rayon unité paramétrée par les angles polaires θ et ϕ.

1. *Grand cercle de la sphère.* On rappelle que si $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_\phi)$ désigne la base locale des coordonnées sphériques, alors la variation d'un vecteur $\overrightarrow{u}_{i=r,\theta,\phi}$ de cette base lors d'une variation infinitésimale $\delta\theta$ et $\delta\phi$ des angles polaires s'écrit :

$$\delta\vec{u}_i = \delta\vec{\Omega} \times \vec{u}_i,$$

avec $\delta\vec{\Omega} = \delta\theta\vec{u}_\phi + \cos(\theta)\delta\phi\vec{u}_r - \sin(\theta)\delta\phi\vec{u}_\theta$.
On cherche à caractériser un grand cercle de la sphère (*i.e.* un cercle de rayon unité tracé sur la sphère $\mathcal{S}$) que l'on paramètre par son abscisse curviligne s.

(a) Montrer que le vecteur tangent au grand cercle s'écrit :

$$\vec{\tau} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta + \sin(\theta)\dot{\phi}\vec{u}_\phi.$$

(b) Calculer $\dot{\vec{\tau}}$. Pourquoi ce vecteur doit-il être parallèle à $\vec{u}_r$? En déduire que sur un grand cercle, θ et ϕ vérifient :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2 \\ \ddot{\phi} &= -2\text{cotan}(\theta)\dot{\phi}\dot{\theta} \end{aligned}$$

Indication : on rappelle que

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R},$$

où $\vec{n}$ désigne le vecteur normal à la courbe et R sont rayon de courbure.

2. Dans cette question on cherche à montrer que les géodésiques de la sphère sont les grands cercles étudiés à la question précédentes.

(a) Écrire le déplacement infinitésimal sur la sphère. En déduire que $g_{\theta\theta} = 1$, $g_{\phi\phi} = \sin^2(\theta)$ et $g_{\theta\phi} = g_{\phi\theta} = 0$.

(b) Montrer que seuls les symboles de Riemann-Christoffel $\Gamma_{\theta,\phi\phi}$, $\Gamma_{\phi,\theta\phi}$ et $\Gamma_{\phi,\phi\theta}$ sont non nuls. En déduire les équations des géodésiques de la sphère et les comparer aux équations de la question 2.1b).