Tutorat 2

Mouvement brownien, diffusion et marchés financiers

Frédéric Chevy – chevy@lkb.ens.fr
http://www.phys.ens.fr/∼chevy/Tutorat/Tut.html

Dans le modèle le plus simple décrivant l'évolution du prix d'une action, on décrit celui-ci par une variable aléatoire S_t, dépendant du temps dont l'évolution est donnée par

$$S_{t+\delta t} = (1 + r\delta t + dB_t)S_t,$$

où δt décrit un accroissement infinitésimal du temps, r est un réel décrivant le rendement moyen de l'action et dB_t est une variable aléatoire, de moyenne nulle, dont on suppose qu'elle vaut $\pm\delta b$ avec une probabilité $p_+ = p_- = 1/2$ (*N.B.* comme on le verra plus bas, δb n'est *a priori* pas d'ordre δt).

1. On considère la variable aléatoire $X_t = \ln S_t$. Montrer que

$$X_{t+\delta t} = X_t + dR_t,$$

   où dR_t est une variable aléatoire dont on donnera la loi de probabilité (on posera $\delta r_\pm = \ln(1 + \mu\delta t \pm \delta b)$).

2. Soit $\mathbb{P}(X_t \in [x, x + dx])$ la probabilité que X_t appartienne à l'intervalle $[x, x + dx]$. En posant $\mathbb{P}(X_t \in [x, x + dx]) = f(x, t)dx$, montrer que

$$f(x, t + \delta t) = \frac{1}{2}\left(f(x - \delta r_-, t) + f(x - \delta r_+, t)\right).$$

3. En développant en série l'équation précédente à l'ordre dominant en δt, montrer que l'on a

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\delta r_+^n + \delta r_-^n}{\delta t}\right)\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right).$$

   Montrer que pour un choix convenable de δb, cette équation prend la forme

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -r'\frac{\partial f}{\partial x} + \sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

   Où l'on exprimera r' et σ en fonction de r et δb. On dit alors que B_t est une variable *brownienne*.

4. On pose $g(x,t) = f(x + r't, t)$. De quelle équation g est-elle solution ? Justifier le terme de *volatilité* utilisé pour décrire σ.
5. Relier $g(x,0)$ à $f(x,0)$. En déduire que l'on peut chercher g sous la forme

$$g(x,t) = \int dx' f(x',0)\mathcal{G}(x - x', t),$$

où l'on cherchera $\mathcal{G}$ en passant dans l'espace de Fourier.

6. On suppose connue de façon certaine la valeur s_0 de l'action à $t = 0$. Que vaut alors $f(x,0)$? En déduire $f(x,t)$. Quelle est la loi de probabilité de S_t ?
7. *Question subsidiaire : formule d'Îto.* La plupart des échanges sur les marchés boursiers ne portent pas sur les actions elle-mêmes mais sur des produits dit "dérivés" de ces actions (par exemple des "options" de vente ou d'achat qui permettent de s'assurer contre les fluctuations des cours du marché de l'action en question). Un des problèmes des mathématiques financières est alors la détermination de la valeur $V(S_t, t)$ du produit dérivé.

   On pose $\delta V = V_{t+\delta t} - V_t$. Montrer que

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial t}\delta t + \frac{\partial V}{\partial S}\delta S_t + \frac{\sigma^2 S_t^2 \delta t}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2},$$

   avec $\delta S = S_{t+\delta t} - S_t$.

   Indication : on notera que dB_t^2 est une variable aléatoire certaine.

Les mathématiques introduites en Bourse

CHRISTIAN WALTER

En 1900, Louis Bachelier, génie méconnu, utilise les théories des probabilités et de la diffusion de la chaleur pour étudier l'évolution de la rente.

Quand la science a-t-elle été utilisée en finance? S'il s'agit de la théorie financière moderne appliquée aux marchés de capitaux, c'est-à-dire de l'approche probabiliste du comportement des marchés, la réponse est claire : le 29 mars 1900.

À cette date, Louis Bachelier soutient sa thèse pour l'obtention du doctorat en mathématiques, thèse qui porte sur la «Théorie de la spéculation», et qui étudie comment formaliser, au moyen de méthodes probabilistes, les variations de la Bourse de Paris.

C'est la première fois, depuis que les bourses existent, que l'on considère les fluctuations des marchés comme les résultats de tirages aléatoires. La totalité des développements probabilistes ultérieurs qui, à partir des années 1970, constitueront le cœur théorique de la finance de marché, sont issus des prémisses de la thèse de Bachelier.

L'originalité du sujet de la thèse de Bachelier frappe de stupeur le jury, où siège Henri Poincaré. Poincaré laisse filtrer son étonnement : «Le sujet s'éloigne un peu de ceux qui sont habituellement traités par nos candidats». Commentaire qui jette un doute sur le sérieux de l'entreprise : la bourse ne se prête pas à des développements mathématiques, pensent les universitaires, les mathématiques ne doivent pas se compromettre avec l'argent. Réapparaissent ainsi les critiques de Platon, rappelées par Plutarque, sur la dégradation des mathématiques lorsqu'elles deviennent appliquées, «les faisant descendre des choses intellectuelles et incorporelles aux choses sensibles et matérielles (...) où il faut trop vilement et trop bassement employer l'œuvre de la main». Les mathématiques pour l'argent? Pour la bourse? Incongruité en 1900.

Le développement des marchés dérivés a pourtant donné raison aux utilitaristes modernes : l'usage des mathématiques en bourse a été validé par la fécondité technique des applications innombrables que l'outil élaboré par Bachelier a permis de réaliser. Si, aujourd'hui, il est possible d'acheter des produits financiers qui permettent de bénéficier des hausses de marché, sans subir les conséquences des baisses, c'est parce qu'en 1900, quelqu'un a eu cette idée invraisemblable à l'époque, que l'on pouvait utiliser la théorie des probabilités pour modéliser les fluctuations boursières.

Que dit Bachelier? Dans sa thèse de doctorat, il écrit : «Les influences qui déterminent les mouvements de la Bourse sont innombrables, des événements passés, actuels ou même escomptables, ne présentant souvent aucun rapport apparent avec ses variations, se répercutent sur son cours». Il ajoute : «La détermination de ces mouvements se subordonne à un nombre infini de facteurs : il est dès lors impossible d'en espérer la prévision mathématique».

Examinant ce «nombre infini de facteurs», Bachelier retrouve dans l'étude du marché boursier des considérations que Gauss avaient déjà rencontrées : la somme de petits aléas indépendants. Les variations induites par cette somme d'aléas suivent la célèbre loi normale, dite «de Laplace-Gauss». Bachelier décrit alors la variabilité du marché au moyen de la dispersion gaussienne et calibre les variations boursières par la variance.

D'un point de vue dynamique, Bachelier invente le concept de rayonnement de la probabilité : «chaque cours rayonne pendant l'élément de temps vers le cours voisin une quantité de probabilité proportionnelle à la différence de leur probabilité (...) la loi qui précède peut, par analogie avec certaines théories physiques, être appelée la loi du rayonnement ou de diffusion de la probabilité». Diffusion : le mot est dit. Cinq ans avant Einstein, Bachelier invente le premier processus de diffusion connu : le mouvement brownien. Ainsi le premier mouvement brownien apparaît en finance avant d'être utilisé, avec le succès que l'on connaît, en physique.

Poincaré apprécie cette vision : «La manière dont Louis Bachelier tire la loi de Gauss est fort originale et d'autant plus intéressante que le raisonnement pourrait s'étendre avec quelques changements à la théorie des erreurs. Il le développe dans un chapitre dont le titre peut sembler étranger, car il l'intitule «Rayonnement de la probabilité». C'est en effet à une comparaison avec la théorie analytique de la propagation de la chaleur que l'auteur a eu recours. Un peu de réflexion *(sic)* montre que l'analogie est réelle et la comparaison légitime. Les raisonnements de Fourier sont applicables presque sans changement à ce problème si différent de celui pour lequel ils ont été créés. On peut regretter que l'auteur n'ait pas développé davantage cette partie de sa thèse». Partie que les universitaires américains développeront trois quarts de siècle plus tard. En examinant le comportement de la rente à la bourse de Paris, Bachelier a retrouvé la loi de Gauss et l'équation de la propagation de la chaleur.

L'utilisation intensive de processus de diffusion en finance de marché illustre l'importance qu'ont prise les mathématiques en Bourse.

Le choix de son sujet a porté préjudice à Bachelier : sa carrière universitaire s'en est ressentie. Après avoir eu beaucoup de difficultés à obtenir un poste de professeur de mathématiques, il a terminé sa carrière à l'Université de Besançon. Il meurt le 28 avril 1946. Six ans après, un universitaire américain, Harry Markowitz, soutient sa thèse sur la théorie du portefeuille, pour laquelle il obtient le prix Nobel d'économie. Comme dans certaines introductions en bourse, autres sont ceux qui sèment, autres sont ceux qui moissonnent.

THÉORIE

DE

LA SPÉCULATION,

Par M.L. BACHELIER

******

INTRODUCTION

Les influences qui déterminent les mouvements de la Bourse sont innombrables, des événements passés, actuels ou même escomptables, ne présentant souvent aucun rapport apparent avec ses variations, se répercutent sur son cours.

À côté des causes en quelque sorte naturelles des variations, interviennent aussi des causes factices : la Bourse agit sur elle-même et le mouvement actuel est fonction, non seulement des mouvements antérieurs, mais aussi de la position de la place.

La détermination de ces mouvements se subordonne à un nombre infini de facteurs : il est dès lors impossible d'en espérer la prévision mathématique. Les opinions contradictoires relatives à ces variations se partagent si bien qu'au même instant les acheteurs croient à la hausse et les vendeurs à la baisse.