# Tutorat 2

Frédéric Chevy – chevy@lkb.ens.fr

## Surfaces minimales et bulles de savon

Fig. 1 – Jean-Siméon Chardin, Bulle de savon (1733-1734, National Gallery of Art, Washington D.C. )

En thermodynamique, on montre que l'énergie d'un film de savon est proportionnelle à sa surface. En l'absence d'autres contrainte extérieure que le cadre sur lequel il est fixé, un film de savon acquièrent donc un profil minimisant sa surface en prenant en compte les éventuelles conditions aux limites imposées par son support.

1. On décrit le film de savon par un paramétrage $\overrightarrow{M}(u,v)$, où $(u,v)$ parcourt un certain domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'aire $S$ du film peut s'écrire

$$S(\overrightarrow{M}) = \int\int_{\mathcal{D}} \left| \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v} \right| dudv.$$

On donnera en particulier l'interprétation géométrique du vecteur $\overrightarrow{n}$ défini par

$$\vec{n} = \frac{\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial v}}{\left| \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right|}$$

2. On perturbe la surface qui est à présent décrite par $\vec{M}'(u,v) = \vec{M}(u,v) + \delta\vec{M}(u,v)$. Montrer que l'aire $S'$ de la nouvelle surface s'écrit à l'ordre 1 en $\delta\vec{M}$

$$S'(\vec{M}') = S(\vec{M}) + \delta S,$$

avec

$$\delta S = \int\int_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{\partial \delta\vec{M}}{\partial u} \cdot \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \wedge \vec{n} \right) - \frac{\partial \delta\vec{M}}{\partial v} \cdot \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \vec{n} \right) \right\} dudv.$$

3. En intégrant $\delta S$ par partie, montrer que

$$\begin{aligned} \delta S \quad = \quad & \oint_{\partial\mathcal{D}} \delta\vec{M} \cdot \left\{ \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \vec{n} \right) du + \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \wedge \vec{n} \right) dv \right\} \\ & - \int\int_{\mathcal{D}} \delta\vec{M} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \vec{n} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \wedge \vec{n} \right) \right\} dudv \end{aligned}$$

   où $\partial\mathcal{D}$ désigne la frontière de $\mathcal{D}$.
   **Indication** : on rappelle la formule de Green-Riemann

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} F_u du + F_v dv = \int\int_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial F_v}{\partial u} - \frac{\partial F_u}{\partial v} \right) dudv.$$

4. *Surface sur un cadre.* On suppose que les bords du film de savon sont maintenus immobiles par un cadre rigide.
   (a) Montrer que $\delta\vec{M} = 0$ sur $\partial\mathcal{D}$ et en déduire que la surface satisfait sur $\mathcal{D}$ l'équation

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \vec{n} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \wedge \vec{n} \right) = 0. \tag{1}$$

   (b) *Représentation de Weierstrass-Enneper des surfaces minimales.* On admet que l'on peut choisir le paramètrage $M(u,v)$ de façon à satisfaire les conditions

$$\left| \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \right| = \left| \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right|$$

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} = 0$$

i. Montrer que pour ce paramètrage, une surface est minimale si elle satisfait l'équation

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{M}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \overrightarrow{M}}{\partial v^2} = 0.$$

ii. En posant $\overrightarrow{\Phi} = \partial_u \overrightarrow{M} - i\partial_v \overrightarrow{M}$, montrer que $\partial_v \overrightarrow{\Phi} = i\partial_u \overrightarrow{\Phi}$.

iii. Rappeler les conditions de Cauchy pour les fonctions analytiques. En déduire que les coordonnées $\phi_k$ de $\overrightarrow{\Phi}$ sont holomorphes pour la variable $z = u + iv$.

iv. Montrer que $\overrightarrow{\Phi} \cdot \overrightarrow{\Phi} = 0$. En déduire que si $g = \phi_3/(\phi_1 - i\phi_2)$ et $w = 2\phi_1/(1-g^2)$, alors on a

$$\begin{aligned} \phi_1 &= w(1-g^2)/2 \\ \phi_2 &= w(1+g^2)/2i \\ \phi_3 &= gw \end{aligned}$$

v. Réciproquement, montrer que la donnée de $g$ et $w$ permet de définir une surface minimale décrite par le paramétrage

$$\overrightarrow{M}(u,v) = \overrightarrow{M}(u_0, v_0) + \mathrm{Re} \int_{z_0}^{z} \overrightarrow{\Phi}(z)dz.$$

vi. *Exemple* : quelles surfaces obtient-on dans le cas où l'on prend

$$g = -e^{z+i\alpha}, w = -e^{-z+2i\alpha}$$

où $\alpha$ est un paramètre réel (on s'intéressera plus particulièrement au cas $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi/2$).

5. *Question subsidiaire : Frontière mobile et figure de Plateau.* On revient au cas général d'une surface minimale $\mathcal{S}$, non réglée, et on suppose à présent que la surface est la réunion de trois surfaces $\mathcal{S}_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$ se rencontrant selon une courbe $\mathcal{C}$ appelée *ligne triple* (Fig. 2).
On choisit le paramétrage $M_i(u_i, v_i)$ de chaque surface de façon à satisfaire les conditions suivantes
   - $\mathcal{C}$ correspond à la courbe $v_i = 0$ et $\overrightarrow{M_1}(u,0) = \overrightarrow{M_2}(u,0) = \overrightarrow{M_3}(u,0)$ ;
   - $\left|\frac{\partial \overrightarrow{M_i}}{\partial u_i}\right| = \left|\frac{\partial \overrightarrow{M_i}}{\partial v_i}\right| = 1$
   - $\frac{\partial \overrightarrow{M_i}}{\partial v_i}(u_i, 0)$ est normal à $\mathcal{C}$.

   (a) Montrer la variation d'aire de la surface lors d'un déplacement $\overrightarrow{\delta M}$ de la courbe $\mathcal{C}$ s'écrit

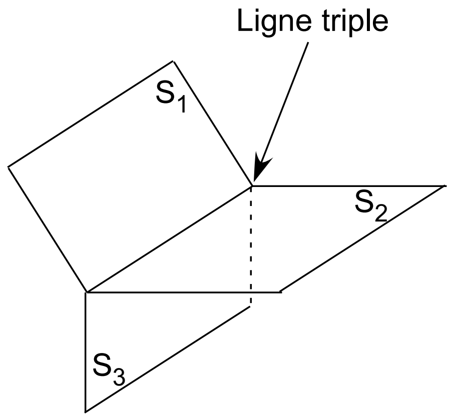



FIG. 2 –

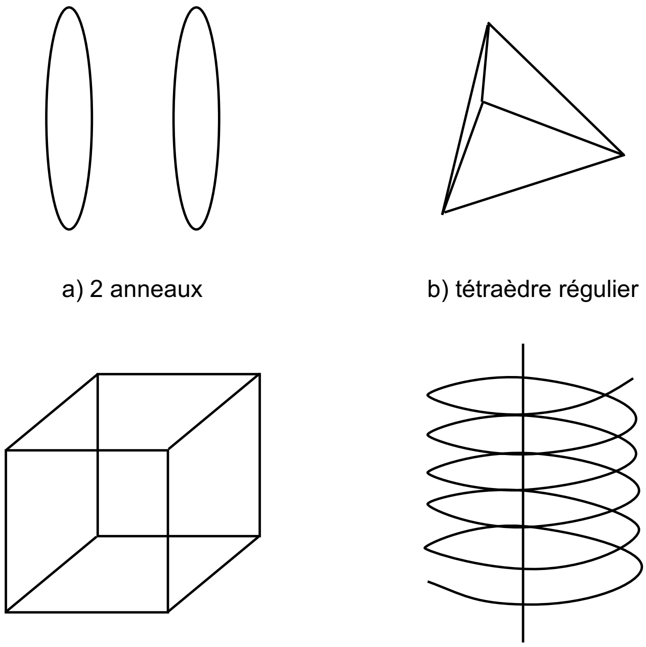
$$\delta S = -\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{\delta M} \cdot \left( \sum_i \frac{\partial \overrightarrow{M_i}}{\partial v_i}(u,0) \right) du$$

(b) Montrer que pour une surface minimale,

$$\sum_i \frac{\partial \overrightarrow{M_i}}{\partial v_i}(u,0) = 0.$$

(c) Déduire de la question précédente l'angle entre les différentes interfaces à leur point de contact.

(d) À l'aide des questions précédentes, deviner les formes prises par des films de savons accrochés aux cadres de la figure 3.



a) 2 anneaux

b) tétraèdre régulier

c) cube

d) hélice

FIG. 3 –