Tutorat 1

Frédéric Chevy – chevy@lkb.ens.fr

Éléments de calcul tensoriel

Les propriétés physiques d'un système sont indépendantes du système de coordonnées utilisés pour le décrire. Cette invariance se traduit par un certain nombre de propriétés mathématiques que l'on exprime grâce à la notion de *calcul tensoriel.*

1 Règles de sommation d'Einstein

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni d'une base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. On considère un vecteur $\mathbf{x}$ de coordonnées $x_{j=1,2,3}$. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice M_{ij} dans la base des $\mathbf{e}_i$. Si $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$, on a :

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} M_{ij} x_j.$$

La convention de sommation d'Einstein revient à récrire l'expression suivante en omettant le signe $\sum$ et en sommant sur les indices répétés. Autrement dit, on écrit :

$$x'_i = M_{ij} x_j.$$

1. Écrire à l'aide des conventions d'Einstein : $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, $\mathrm{tr}(M)$.
2. Déduire de la question précédente que pour toutes matrices M et M', on a $\mathrm{Tr}(M \cdot M') = \mathrm{Tr}(M' \cdot M)$.

2 Tenseurs, opérations sur les tenseurs

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel. On dit qu'une application $\boldsymbol{T}$ de $\mathcal{E}^n$ dans $\mathbb{R}$ est une forme n-linéaire si et seulement si pour tout $\boldsymbol{x}^{(i=1..n)} \in \mathcal{E}$, l'application $x^{(p)} \to \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, ..., \boldsymbol{x}^{(p)}, ..\boldsymbol{x}^{(n)})$ est linéaire. On note $\mathcal{T}_n(\mathcal{E})$ l'ensemble des formes n-linéaires sur $\mathcal{E}$. Dans le cas où $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$, on dit que $f \in \mathcal{T}_n(\mathcal{E})$ est un *tenseur* de rang n.

1. *Composante d'un tenseur dans une base.* On décompose les vecteurs $\boldsymbol{x}^{(i)}$ dans la base $\boldsymbol{e}_k$ et on pose en notation d'Einstein $\boldsymbol{x}^{(i)} = x_k^{(i)} \boldsymbol{e}_k$. Montrer que l'action d'un tenseur T sur les $\boldsymbol{x}^{(i)}$ peut s'écrire sous la forme

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}^{(1)}, ..., \boldsymbol{x}^{(n)}) = T_{k_1,k_2,...k_n} x_{k_1}^{(1)} x_{k_2}^{(2)} ... x_{k_n}^{(n)},$$

où les $T_{k_1,k_2,...k_n}$ sont 3^n nombres réels. En déduire la dimension de $\mathcal{T}_n$

(a) Par un argument de dimension, montrer que $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont isomorphes à $\mathcal{E}$ et $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, ensemble des endomorphismes linéaires de $\mathcal{E}$.

(b) On considère une seconde base $\boldsymbol{e}'_{k'}$ reliée à la base $\boldsymbol{e}_k$ par la relation linéaire $\boldsymbol{e}_k = P_{kk'}\boldsymbol{e}'_{k'}$. Donner l'expression des composantes du tenseur $\boldsymbol{T}$ dans la nouvelle base.

2. *Produit tensoriel.* Soient deux tenseurs $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{T}'$ de rangs n et n' respectivement. On définit le produit tensoriel $\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{T}'$ comme un tenseur de rang $n + n'$ défini par

$$\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{T}'(\boldsymbol{x}_1, ...\boldsymbol{x}_{n+n'}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}_1, ...\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{x}_{n+1}...\boldsymbol{x}_{n+n'}).$$

(a) Donner l'expression des composantes du tenseur $\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{T}'$ dans une base donnée en fonction de celles de $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{T}'$.

(b) Soit $\boldsymbol{e}^*_k$ l'élément de $\mathcal{T}_1$ tel que $\boldsymbol{e}^*_k(\boldsymbol{e}_{k'}) = \delta_{kk'}$. Montrer que les $\boldsymbol{e}^*_{i_1} \otimes \boldsymbol{e}^*_{i_2} \otimes ... \otimes \boldsymbol{e}^*_{i_n}$ forment une base de $\mathcal{T}_n$.

3. *Contraction.* Soit un tenseur $\boldsymbol{T}$ de rang $n > 2$. On appelle contraction de $\boldsymbol{T}$ par rapport à deux de ses indices le tenseur $\boldsymbol{T}'$ de rang $n - 2$ définit par

$$\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{x}^{(1)}, ..., \boldsymbol{x}^{(n-2)}) = \sum_k \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}^{(1)}, ..., \boldsymbol{x}^{(n-2)}, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_k).$$

(a) Montrer que la définition de T' est indépendant du choix de *base orthornormée* $\boldsymbol{e}_k$.

(b) Donner l'expression des composantes du tenseur $\boldsymbol{T}'$ dans une base donnée en fonction de celles de $\boldsymbol{T}$.

3 Exemples de tenseur en physique : électromagnétisme des milieux matériels

On décrit les propriétés macroscopiques d'un milieu diélectrique plongé dans un champ $\boldsymbol{E}$ par un potentiel thermodynamique $G(\boldsymbol{E})$. On définit la polarisation $\boldsymbol{P}$ du milieu comme la grandeur extensive associée à $\boldsymbol{E}$, soit $P_i = \partial G/\partial E_i$.

1. Dans la limite des champs électriques faibles, montrer que G peut s'écrire

$$G(\boldsymbol{E}) = G(0) + \boldsymbol{\chi}^{(1)}(\boldsymbol{E}) + \frac{1}{2!}\boldsymbol{\chi}^{(2)}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}) + \frac{1}{3!}\boldsymbol{\chi}^{(3)}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}) ...,$$

où $\boldsymbol{\chi}^{(n)}$ est un tenseur de rang n.

2. Déduire de la question précédente la l'expression de la polarisation du milieu en fonction du champ électrique.
3. Dans le cas où le milieu possède un centre de symétrie, montrer que $\boldsymbol{\chi}^{(2)} = 0$.