Tutorat 5

distributions et équations différentielles

Frédéric Chevy – chevy@lkb.ens.fr
http://www.phys.ens.fr/∼chevy/Tutorat/Tut.html

1 Préliminaire : théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles linéaires

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On note $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ l'espace des endomorphismes linéaires de $\mathcal{E}$, que l'on identifie aux matrices $n \times n$. On rappelle qu'une norme sur un espace vectoriel $\mathcal{F}$ satisfait les axiomes :

- $\forall x \in \mathcal{F}$, $x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$.
- $\forall (x, \lambda) \in \mathcal{F} \times \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
- $\forall (x, y) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

1. *Norme subordonnée.* Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$. On note $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|$.
   (a) Montrer que $\|A\|$ existe et définit une norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{E})$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{E}$, $\|A(x)\| \leq \|A\| \|x\|$. En déduire que pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{L}(\mathcal{E})^2$, $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \|B\|$.
2. *Théorème de Cauchy-Lipschitz.* Soit I un intervalle et $A : I \to \mathcal{L}(\mathcal{E})$ une application continue de I dans l'ensemble des matrices. On cherche à démontrer l'existence et l'unicité sur I des solutions de l'équation différentielle

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X(t). \tag{1}$$

   avec $X : I \to \mathbb{R}^n$ et la condition initiale $X(t_0) = X_0$, $t_0 \in I$.
   Soit $t' \in I$, on note L_t' l'endomorphisme de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ défini par

$$L_{t'}(f)(t) = \int_{t'}^{t} A(t'')f(t'')dt''.$$

   (a) Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Montrer que la série de fonctions $\sum_n L_{t'}^n(X_0)$ converge normalement sur tout compact de I. On note $X(t)$ sa somme. Que vaut $X(t')$?
   (b) Montrer que X est continue et dérivable. Calculer $\dot{X}$ et montrer qu'elle est solution de (1).

2 Notion de fonction de Green

Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert et A une application continue de I dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.
On considère l'équation différentielle d'ordre 1 pour l'inconnue $X(t) \in \mathbb{R}^n$

1. Soit l'application $R(t, t')$ de $I \times I$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ solution de l'équation différentielle
$$\partial_t R = A(t)R(t, t'),$$
avec la condition initiale $R(t, t) = \mathrm{Id}_n$, où Id_n est l'application identité. Justifier l'existence et l'unicité de R.
2. Exprimer les solutions de (1) avec la condition initiale $X(t') = X_0$ en fonction de X_0 et $R(t, t')$.
3. *Notion de fonction de Green.* On considère l'équation différentielle dans l'ensemble de distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$
$$\frac{dG}{dt} = AG + \delta(t - t')\mathrm{Id}_n.$$
   (a) Montrer qu'une solution de cette équation est $G(t, t') = \theta(t - t')R(t, t')$.
   (b) Soit $F(t)$ un application continue de I dans $\mathbb{R}^n$. On cherche à résoudre l'équation différentielle avec second membre
$$\frac{dX}{dt} = A(t)X(t) + F(t). \tag{2}$$
   Montrer qu'une solution particulière de cette équation est donnée par $X_0 = G * F$, où l'application $G * F$ de I dans $\mathbb{R}^n$ est définie par
$$(G * F)(t) = \int_I G(t, t') \cdot F(t')dt'.$$
   Quelle est la solution générale de l'équation ?
   (c) *Application à la théorie des perturbations.* On considère l'équation (1) et l'on suppose que A s'écrit $A = A_0 + \varepsilon A_1$ où les solutions $X_0(t)$ pour $A = A_0$ sont connues. Montrer que la solution X_ε pour $\varepsilon \neq 0$ est donnée par
$$X_\varepsilon = X_0 + \varepsilon G * (A_1 \cdot X_\varepsilon).$$
   Inverser cette relation et en déduire le développement de X_ϵ en puissance de ε.
4. *Équations différentielles d'ordre 2* : On considère l'équation différentielle d'ordre 2
$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t).$$
   (a) En considérant les vecteurs $X = (y, y')$ et $F = (0, f)$, montrer que X obéit à une équation du type (2) pour une matrice A que l'on précisera.

(b) En déduire que $y = g * f$ où g est solution de

$$g'' + a(t)g' + b(t)g = \delta(t - t').$$

(c) Calculer g dans le cas où a et b sont indépendants du temps (on pourra d'abord chercher $\widehat{g}(\omega)$ puis repasser dans l'espace direct en utilisant le théorème des résidus).