Tutorat 4

Distributions

Frédéric Chevy – chevy@lkb.ens.fr

Les deux premières partie de ce tutorat sont consacrées à deux classes de distributions particulières, la partie finie et composée d'une distribution et d'une application. Ces outils seront ensuite appliquées à l'étude d'équations différentielles linéaires.

Notations : Soit I un ouvert de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{D}(I)$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact définies sur I. On note alors $\mathcal{D}'(I)$ l'ensemble des distributions sur I (*i.e.* le dual topologique de $\mathcal{D}(I)$).
Dans l'espace des fonctions $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ à décroissance rapide, on définit la transformée de Fourier de f par :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

La transformée de Fourier inverse est alors définie par :

$$\check{g}(x) = \int_{\mathbb{R}} g(\omega) e^{i\omega x} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Question préliminaire : Montrer que tout ϕ de $\mathcal{D}(I)$ et tout x_0 dans I, on a :

$$\phi(x) = \phi(x_0) + (x - x_0)\psi(x),$$

où $\psi \in \mathcal{C}_\infty(I)$ et pour tout x, $|\psi(x)| < \sup_I |\phi'(x)|$.
Indication : on utilisera la formule de Taylor avec reste intégrale.

1 Partie finie

1. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On pose :

$$\langle T, \phi \rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-x_0|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x - x_0}\, dx$$

   (a) Soit $K = [x_0 - M, x_0 + M]$ un compact contenant le support de ϕ. Montrer que :

$$\int_{|x-x_0|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x - x_0}\, dx = \phi(x_0) \int_{\epsilon<|x-x_0|<M} \frac{dx}{x - x_0} + \int_{\epsilon<|x-x_0|<M} \psi(x)\, dx,$$

   où ψ est défini de la même façon que dans la question préliminaire.

(b) En déduire que

$$\langle T, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, dx,$$

et que T définit une distribution sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. T est alors baptisée "partie finie" de $1/(x - x_0)$, que l'on notera aussi : $\mathcal{PF}(1/(x - x_0))$.

(c) Proposer (sans démonstration) une définition de la partie finie de $1/f$, où f est une fonction s'annulant en x_0.

2. Montrer que $x\mathcal{PF}(1/x) = 1$. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation :

$$xT = 1.$$

3. Soit $\epsilon > 0$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_\epsilon(x) = 1/(x + i\epsilon)$$

f_ϵ définit une distribution sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et on s'intéresse ici à la limite de f_ϵ lorsque $\epsilon \to 0$.

(a) Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $K = [-M, +M]$ un compact contenant le support de ϕ. Montrer que :

$$\langle f_\epsilon, \phi \rangle = \alpha_\epsilon - i\beta_\epsilon,$$

avec ;

$$\begin{aligned}
\alpha_\epsilon &= \int_K \frac{x}{x^2 + \epsilon^2}\phi(x)\, dx \\
\beta_\epsilon &= \int_K \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}\phi(x)\, dx
\end{aligned}$$

(b) En posant de même que précédemment $\phi(x) = \phi(0) + x\psi(x)$, montrer que :

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \alpha_\epsilon = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, dx = \langle \mathcal{PF}\left(\frac{1}{x}\right), \phi \rangle.$$

(c) En posant $u = x/\epsilon$ et en utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $\lim_{\epsilon \to 0^+} \beta_\epsilon = \pi\phi(0)$.

(d) Déduire des deux questions précédentes que :

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{x + i\epsilon} = \mathcal{PF}\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta(x).$$

Même question pour $\lim_{\epsilon \to 0^+} 1/(x - i\epsilon)$.

4. *Application* : transformée de Fourier de la fonction de Heavyside. On considère la fonction de Heavyside $H(x)$ comme une distribution tempérée.

(a) Soit T_n une suite de distributions tempérées. Montrer que si la suite T_n admet une limite T, alors $\widehat{T_n}$ tend vers $\widehat{T}$.

(b) Montrer que

$$H(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} H(x) e^{-\epsilon x}.$$

(c) En déduire que :

$$\widehat{H}(\omega) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\frac{1}{\epsilon + i\omega} \right),$$

puis conclure.

2 Composition de distributions

Soient f un $\mathbb{C}^\infty$ difféomorphisme de I sur $J = f(I)$, où I et J sont deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, et T une distribution de $\mathcal{D}'(J)$.

1. Soit $\phi \in \mathcal{D}(I)$ et $\psi = \phi o f^{-1} / |f' o f^{-1}|$. Montrer que $\psi \in \mathcal{D}(J)$.
2. Pour tout $\phi \in \mathcal{D}(I)$, on pose

$$\langle T o f, \phi \rangle = \langle T, \frac{\phi o f^{-1}}{|f' o f^{-1}|} \rangle.$$

   Montrer que $T o f$ est une distribution de $\mathcal{D}'(J)$.
3. Montrer que si T est une fonction, la définition précédente coïncide avec la composition habituelle.
4. Si T est la distribution δ de Dirac, que vaut $T o f$, que l'on notera par abus $\delta(f(x))$.
5. On considère à présent une fonction f $\mathcal{C}^\infty$ mais non nécessairement inversible dont les racines x_n sont isolées et vérifient $\forall n,\ f'(x_n) \neq 0$. On pose :

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|}.$$

   (a) Montrer que tout ensemble compact $\mathcal{K}$ de $\mathbb{R}$ ne contient qu'un nombre fini de racines de f.
   (b) Déduire de la question précédente que $\delta o f$ est bien une distribution.
   (c) Montrer que si f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$, cette définition rejoint la précédente.