Tutorat 4

Bases hilbertiennes et ondelettes

Frédéric Chevy – chevy@lkb.ens.fr

1 Théorème de Fischer-Riesz

On rappelle que pour tout entier naturel p, l'espace $L_p(I)$ est constitué des fonctions φ tels que $|\varphi|^p$ soit intégrable sur l'intervalle I. $\|\varphi\|_p = \left(\int |\varphi|^p\right)^{1/p}$ définit alors une norme pour laquelle on va montrer que L_p est complet[1]. On admet pour cela le théorème de convergence monotone : si f_n est une suite croissante de fonctions mesurables positives, alors $f = \sup_n f_n$ est mesurable et $\int f = \lim \int f_n$.

1. *Lemme préliminaire* : on souhaite montrer qu'un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute série absolument convergente y est convergente.
   (a) Soit $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel normé complet et u_n une série absolument convergente d'éléments de $\mathcal{E}$
      i. On pose $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$. Montrer que $\|S_{N+P} - S_N\| \leq \sum_{n=N+1}^{N+P} \|u_n\|$.
      ii. Écrire le critère de Cauchy pour la série convergente de terme général $\|u_n\|$ et en déduire que S_N est une suite de Cauchy. Conclure.
   (b) On suppose à présent que $\mathcal{E}$ n'est pas nécessairement complet mais que toute série absolument convergente est convergente et on considère une suite de Cauchy u_n.
      i. Montrer que si il existe une suite extraite u_{n_k} convergeant vers u_∞, alors u_n est convergente.
      Indication : On pourra montrer que pour tout k que $\|u_n - u_\infty\| \leq \|u_n - u_{n_k}\| + \|u_{n_k} - u_\infty\|$ puis conclure après un choix judicieux de k.
      ii. Soit $\epsilon = 1/2^k$. Montrer qu'il existe n_k tel que $n_k \geq n_{k'}$ si $k \geq k'$ et pour tout $n \geq n_k$, $\|u_n - u_{n_k}\| \leq \epsilon$.
      iii. Soit la série de terme général $v_k = u_{n_{k+1}} - u_{n_k}$. Montrer que v_k est absolument convergente et en déduire la convergence de u_n.
2. On souhaite à présent montrer que l'espace L_p est complet. Pour cela on utilise le lemme préliminaire et on considère une série absolument convergente de terme général $f_n \in L_p(I)$.
   (a) À l'aide du théorème de convergence monotone, montrer que $x \to \left(\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|\right)^p$ est mesurable.

[1] C'est-à-dire que toute suite de Cauchy converge.

(b) En utilisant l'inégalité triangulaire pour la norme $\|.\|_p$, montrer que $\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|\right)^p \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_p\right)^p$. En déduire que $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ appartient à $L_p(I)$.

(c) Montrer que $\forall x \in I$ et $\forall N \in \mathbb{N}$, $|\sum_{n=0}^{N} f_n(x)| \leq g(x)$. Conclure en utilisant le théorème de convergence dominée.

2 Géométrie dans les espaces de Hilbert : bases hilbertiennes

Dans cette partie, on considère un espace de Hilbert[2] $\mathcal{H}$ dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire.

1. Question préliminaire : notion de famille sommable. Soit I un ensemble (fini ou non) et $x_{i\in I}$ indexée sur I une famille d'éléments d'un espace vectoriel normé $\mathcal{E}$. On dit que la famille x_i est sommable si et seulement si il existe x tel que pour tout $\epsilon > 0$, on puisse trouver un sous-ensemble J de I, de cardinal fini, tel que pour tout K de cardinal fini avec $J \subset K \subset I$, $\left\|x - \sum_{k\in K} x_k\right\| < \epsilon$. On notera alors $x = \sum_{i\in I} x_i$. Sans nuire à la généralité, on suppose ici que $x = 0$, et on souhaite montrer dans ce qui suit que si x_i est sommable, l'ensemble des x_i non nuls (le support de x_i) est nécessairement dénombrable.

   (a) Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $\mathcal{C}_n$ la couronne de $\mathcal{E}$ constituée des $y \in \mathcal{E}$ tels que $2^n < \|y\| \leq 2^{n+1}$. Montrer que si I est indénombrable alors il existe un n_0 tel que $\mathcal{C}_{n_0}$ contienne une infinité de x_i non nuls distincts.

   (b) On pose $\epsilon = 2^{n_0}/4$ et soit J intervenant dans la caractérisation de la sommabilité. Montrer qu'il existe $x_{i_0} \in \mathcal{C}_{n_0}$ et n'appartenant pas à J.

   (c) On pose $K = J \cup \{x_{i_0}\}$. Montrer que $\|\sum_{k\in K} x_k\| \geq \left|\|x_{i_0}\| - \left\|\sum_{k\in J} x_k\right\|\right|$ et montrer que l'on aboutit à une absurdité.

   (d) D'après ce qui précède, si I est infini, on peut l'identifier à $\mathbb{N}$ et x_i est alors le terme général d'une série. Montrer que la série est alors convergente.
   Indication : On prendra $N = \sup(i \in J)$ et $K_{n\geq N} = \{i \in \mathbb{N}, i \leq n\}$.

2. *Projection sur un convexe fermé.* On rappelle que pour un point x et un ensemble $\mathcal{F}$, la distance de x à $\mathcal{F}$, notée $d(x, \mathcal{F})$, est définie par $d(x, \mathcal{F}) = \inf_{y\in\mathcal{F}} \|x - y\|$. On souhaite montrer que si $\mathcal{F}$ est un convexe fermé[3], alors

$$\exists! y \in \mathcal{F} / d(x, \mathcal{F}) = \|x - y\|.$$

   y est alors appelé le projeté orthogonal de x sur $\mathcal{F}$, que l'on notera $y = p_{\mathcal{F}}(x)$.

   (a) *Théorème de la médiane.* Montrer que pour tout triplet $(x, y, z) \in \mathcal{E}^3$, on a

$$\|y - z\|^2 + 4\left\|\frac{y + z}{2} - x\right\|^2 = 2\left(\|y - x\|^2 + \|z - x\|^2\right).$$

   Interpréter géométriquement cette égalité.

[2]On rappelle qu'un espace de Hilbert est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire hermitien, et complet pour la norme associée.

[3]On rappelle qu'un ensemble $\mathcal{F}$ est convexe si et seulement si pour tout $(x, y) \in \mathcal{F}^2$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ est fermé si toute suite d'éléments de $\mathcal{F}$ convergeant dans $\mathcal{E}$ converge aussi dans $\mathcal{F}$.

(b) En utilisant le théorème de la médiane, montrer que y tel que $d(x, \mathcal{F}) = \|x - y\|$ est unique.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde en notant que si y et y' sont deux éléments de $\mathcal{F}$, alors $(y + y')/2 \in \mathcal{F}$ puis conclure.

(c) On pose $d = d(x, \mathcal{F})$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in \mathcal{F}$ tel que $0 \leq \|x - y_n\| - d \leq 1/n$.

(d) On souhaite montrer que la suite y_n ainsi définie est une suite de Cauchy.

i. En utilisant la convexité de $\mathcal{F}$, montrer que $\|(y_n + y_m)/2 - x\| \geq d$.

ii. À l'aide du théorème de la médiane, déduire des questions précédentes que y_n est une suite de Cauchy convergeant dans $\mathcal{F}$.

(e) On considère la cas particulier où $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par une base orthonormée $\{a_i\}_{i=1..n}$.

i. Montrer que $x' = x - \sum_i a_i \langle a_i, x\rangle$ est orthogonal à $\mathcal{F}$.

ii. Soit $y = \sum_i y_i a_i$ un vecteur de $\mathcal{F}$. Montrer que $\|y-x\|^2 = \|x\|^2 + \sum_i (y_i - \langle a_i, x\rangle)^2$. Pour quelles valeurs des coefficients a_i $\|y - x\|$ est il minimal ? En déduire que

$$p_{\mathcal{F}}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle a_i, x\rangle.$$

3. Soit I un ensemble de cardinal fini ou infini et $a_{i\in I}$ une famille orthonormale de vecteurs de $\mathcal{H}$. On voudrait montrer que si $\mathcal{F}$ est le sous espace vectoriel engendré par les a_i, alors $\mathcal{F}$ dense dans $\mathcal{H}$ entraîne

- Pour tout $x \in \mathcal{H}$, la famille $a_i \langle a_i, x\rangle$ est sommable et $x = \sum_{i\in I} a_i \langle a_i, x\rangle$.
- Pour tout $x \in \mathcal{H}$, la famille $|\langle a_i, x\rangle|^2$ est sommable et $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle a_i, x\rangle|^2$ (Théorème de Parseval).

On dit alors que les a_i forment une base *hilbertienne* de $\mathcal{H}$.

(a) Préciser la différence entre la base d'un espace vectoriel et la base hilbertienne d'un espace de Hilbert.

(b) Soit x un élément de $\mathcal{H}$ et $\epsilon > 0$.

i. Montrer qu'il existe une sous partie J de I de cardinal fini tel que

$$\left\| x - \sum_{j\in J} a_j \langle a_j, x\rangle \right\| \leq \epsilon.$$

ii. Soit $\mathcal{V}_K$ le sous-espace vectoriel engendré par les $a_{k\in K}$. Montrer que si $J \in K$, alors $d(x, \mathcal{V}_K) \leq d(x, \mathcal{V}_J)$. En déduire que si K est une sous-partie de I de cardinal fini contenant J alors $\left\|x - \sum_{k\in K} a_k \langle a_k, x\rangle\right\| \leq \epsilon$. Conclure.

3 Bases hilbertiennes de $L_2([0,1])$

Dans cette dernière partie, on souhaite exhiber quelques exemples de bases hilbertiennes couramment utilisées dans $L_2([0,1])$. Pour cela, on admet le théorème suivant :
Théorème de Stone-Weierstrass[4]. On dit qu'un sous-espace vectoriel $\mathcal{A}$ de $L_p([0,1])$ est une sous algèbre si et seulement si $\forall (f,g) \in \mathcal{A}^2$, $fg \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ est une algèbre unitaire si elle contient la fonction constante égale à 1. Si $\mathcal{A}$ sépare $\mathbb{C}$, c'est-à-dire que pour tout $(x,y) \in \mathbb{C}^2$, on peut trouver f tel que $f(x) \neq f(y)$, alors $\mathcal{A}$ est dense dans $L_p([0,1])$.

1. Montrer que les polynômes et les polynômes trigonométriques de période 1 forment deux sous algèbres dense dans $L_2([0,1])$. Conclusion
2. *Base d'ondelettes de Haar*. Les ondelettes (voir article ci-joint) constituent une généralisation de la transformation de Fourier dans laquelle on effectue une décomposition dite *temps/fréquence*, où, pour simplifier on détermine quelles sont les contributions fréquentielles d'un signal à un instant donné. Soit χ_I la fonction caractéristique de l'intervalle I. La base des ondelettes de Harr est engendrée par la fonction

$$\psi(t) = \chi_{[0,1/2]}(t) - \chi_{[1/2,1]}(t).$$

   (a) Pour $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ et $k \leq 2^j - 1$, on pose $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\phi(2^j t - k)$. Tracer qualitativement $\psi_{j,k}$. En déduire que

$$\langle \psi_{j,k} | \psi_{j',k'} \rangle = \delta_{j,j'}\delta_{k,k'}.$$

   (b) Montrer que l'espace vectoriel $\mathcal{A}$ engendré par $\chi_{[0,1]}$ et les $\psi_{j,k}$ forme une sous algèbre unitaire de $L_2[0,1]$.
   Indication : on pourra montrer que le produit de deux vecteurs de base de l'algèbre sont encore dans l'algèbre puis conclure par linéarité.

   (c) Montrer que $\mathcal{A}$ sépare $\mathbb{C}$. Conclusion.

[4] En toute rigueur, le théorème de Stone-Weierstrass porte sur les sous-algèbres des fonctions continues, mais peut être étendu aux sous algèbres de L_p. Cf. http ://smf.emath.fr/en/Publications/Gazette/2002/91/smf_gazette_91_10-17.pdf