Tutorat 4

Fonctions de Bessel

Frédéric Chevy – chevy@lkb.ens.fr

L'objet de ce tutorat est l'étude de quelques propriétés des fonctions de Bessel, une famille de fonctions spéciales apparaissant notamment dans l'étude de la propagation d'onde dans les milieux bidimensionnels (par exemple les vagues à la surface de l'eau).

1 Fonctions de Bessel I et J

Pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$, on considère l'application f_α définie par :

$$\begin{array}{rcccl} f_\alpha & : & \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & f_\alpha(z) = \exp(\alpha(z+z^{-1})/2) \end{array}$$

1. Montrer que f_α est développable en série de Laurent sur $\mathbb{C}^*$. On posera dans la suite :

$$f_\alpha(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(\alpha) z^m.$$

2. En effectuant le changement de variable $u = 1/z$, montrer que $I_m(\alpha) = I_{-m}(\alpha)$. Dans la suite on se restreindra donc à l'étude du cas $m \geq 0$.
3. Montrer que si $\mathcal{C}$ est un contour enserrant une fois l'origine :

$$I_m(\alpha) = \oint_{\mathcal{C}} \frac{f_\alpha(z)}{z^{m+1}}\, dz.$$

En choisissant pour contour le cercle de rayon unité centré sur l'origine, en déduire que :

$$I_m(\alpha) = \int_0^{2\pi} e^{\alpha\cos(\theta)} e^{-im\theta}\, \frac{d\theta}{2\pi}. \tag{1}$$

4. À partir de la relation précédente, montrer que $\alpha \mapsto I_m(\alpha)$ est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ tout entier et que l'on a :

$$I_m(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n,m}}{n!} \alpha^n,$$

avec :

$$a_{n,m} = \int_0^{2\pi} \cos^n(\theta) e^{-im\theta} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

5. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que $a_{n,m}$ n'est différent de zéro que si $n = m + 2q$, avec q entier naturel, et qu'alors :

$$a_{n,m} = \frac{C_n^{(n+m)/2}}{2^n}.$$

En déduire que :

$$I_m(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^m \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!(m+q)!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2q}.$$

6. En appliquant la méthode de Laplace (cf. tutorat 4) à l'équation (1), montrer que pour $\alpha \to +\infty$:

$$I_m(\alpha) \sim \frac{e^\alpha}{\sqrt{2\pi\alpha}}.$$

7. Déduire des questions précédentes l'allure de $\alpha \mapsto I_m(\alpha)$, avec α réel.
8. *Fonction* J_m. On pose par convention $J_m(x) = (-i)^m I_m(ix)$.
   (a) À l'aide de la méthode de la phase stationnaire, donner un équivalent de J_m en $+\infty$. En déduire que J_m possède une infinité de racines.
   (b) *Application* : On éclaire en incidence normale un écran percé d'un trou circulaire de rayon R. On suppose la source lumineuse cohérente. Rappeler d'expression de l'amplitude lumineuse diffractée à a sortie du trou et montrer que celle-ci s'exprime en fonction de J_0.

2 Lien avec les fonctions harmoniques. Fonction K

Une fonction est dite *harmonique* si elle est solution de l'équation $\Delta\phi = 0$, où Δ désigne l'opérateur laplacien.
On cherche des solutions harmoniques s'écrivant en coordonnées cylindriques : $\phi(r, \theta, z) = f(r)e^{im\theta}e^{ikz}$, avec $(m, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.
On rappelle qu'en coordonnées cylindriques, le laplacien se met sous la forme :

$$\Delta\phi = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}. \tag{2}$$

1. Montrer que f est solution de l'équation :

$$f'' + \frac{1}{r}f' - \frac{m^2}{r^2}f - k^2 f = 0.$$

Montrer que si l'on fait le changement de variable $x = kr$, alors $g(x) = f(x/k)$ est solution de :

$$g'' + \frac{1}{x}g' - \frac{m^2}{x^2}g - g = 0. \tag{3}$$

2. À l'aide du développement en série entière de la fonction de Bessel I_m, montrer que $g_1(x) = I_m(x)$ est solution de (3).
3. À l'aide de la question précédente, déterminer l'équation différentielle dont est solution J_m. À quelle situation physique cela se rapporte-t-il ?
4. On cherche une deuxième solution g_2 de (3) sous la forme $g_2(x) = \lambda(x)I_m(x)$ (méthode de variation de la constante).

   (a) Montrer que λ est solution de l'équation différentielle :

   $$\lambda'' I_m + 2\lambda' I_m' + \frac{I_m}{x}\lambda'$$

   et en déduire que λ s'écrit :

   $$\lambda(x) = \alpha \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{x' I_m^2(x')} + \beta,$$

   où α, β et x_0 sont trois constantes arbitraires.

   (b) En utilisant le comportement asymptotique de I_m, montrer que λ possède une limite finie quand $x \to \infty$. En déduire que le choix :

   $$g_2(x) = \alpha I_m(x) \int_{x}^{\infty} \frac{dx'}{x' I_m^2(x')}$$

   est solution de (3) et satisfait la condition aux limites $\lim_{x\to+\infty} g_2(x) = 0$. En déduire que g_2 est indépendante de g_1.
   Par convention, on posera dans la suite :

   $$K_m = I_m(x) \int_{x}^{\infty} \frac{dx'}{x' I_m^2(x')}.$$

   (c) Déduire du comportement asymptotique de I_m celui de K_m en $x \sim 0$ et $x \sim +\infty$. *N.B.* On distinguera les cas $m = 0$ et $m \neq 0$.

Formulation intégrale. Pour $n \geq 0$, on cherche à calculer l'intégrale :

$$B_n(x) = \frac{1}{x^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixz}}{(1+z^2)^{n+1/2}} dz.$$

(a) On suppose dans un premier temps $n \geq 1$. En dérivant sous le signe somme, montrer que :

$$\begin{aligned}
B_n'(x) &= -\frac{n}{x}B_n(x) + \frac{1}{x^n}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ize^{ixz}}{(1+z^2)^{n+1/2}}dz \\
B_n''(x) &= \frac{n(n+1)}{x^2}B_n(x) + B_n(x) - \frac{2n}{x^{n+1}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ize^{ixz}}{(1+z^2)^{n+1/2}}dz - \frac{1}{x^n}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixz}}{(1+z^2)^{n-1/2}}dz.
\end{aligned}$$

(b) En intégrant par parties, en déduire que B_n est solution de l'équation :

$$B_n'' + \frac{B_n'}{x} - \frac{n^2}{x^2} B_n - B_n = 0.$$

(c) Montrer que $\lim_{k\to\infty} B_n(x) = 0$ et en déduire que $B_n(x) = \alpha_n K_n(x)$, où α_n est une constante.

(d) Donner le comportement de B_n en 0 et en déduire la valeur de α_n.
Indications : on donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1/2}} = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1/2)}.$$

(e) Reprendre l'étude pour $n = 0$. Dans ce cas, on montrera que :

$$B_0(x) = 2\int_1^{\infty} \frac{e^{-xy}}{\sqrt{y^2-1}} dy.$$

Indication : on montrera que la fonction $z \to e^{ixz}/\sqrt{1+z^2}$ possède une branche de discontinuité pour $z = it$, avec t réel de valeur absolue supérieure à 1 et on utilisera le théorème des résidus.

(f) *Application.* On considère une spirale de pas b et de rayon R chargée électriquement avec une densité linéique λ. Calculer le champ électrique sur l'axe de l'hélice et montrer que celui-ci s'exprime en fonction de K_1.