# Tutorat 3

## Ensembles fractals

Frédéric Chevy – chevy@lkb.ens.fr
http://www.phys.ens.fr/~chevy/Tutorat/Tut.html

*Autrefois, quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique ; aujourd'hui on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères et on n'en tirera jamais que cela.* Henri Poincaré.

Au long du XX$^{\text{ème}}$, les mathématiciens ont mis à jours des ensembles pathologiques dont la structure défie l'intuition que l'on peut se faire de la notion de dimension (cf. article ci-joint). Un paramètre permettant de caractériser la complexité de ces objets est la dimension fractale, qui généralise le concept de dimension à des valeurs non entières. Ces objets ce sont révélés par la suite d'une grande utilité en physique, puisqu'on a pu montrer au cours des années 80 qu'ils permettaient de décrire des phénomène complexes tels que la turbulence ou la formation d'agrégats.

# 1 Activités d'éveil : la dimension de boîte

*N.B.* : Dans les questions (1) et (2), on pourra se contenter de raisonnements "avec les mains". Soit un ensemble $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^2$. On cherche ici à calculer le nombre $N(\epsilon)$ de carré de côté $\epsilon$ nécessaire pour recouvrir $\mathcal{S}$.

1. Justifier brièvement que l'on attend $N(\epsilon) \propto \epsilon^{-D}$ avec $D = 0, 1, 2$ si $\mathcal{S}$ est un point, une courbe ou une surface.
2. Tester "expérimentalement" le résultat précédent sur la sinusoïde fournie en annexe en traçant $\ln N$ en fonction de $\ln \epsilon$.
3. Même question dans le cas de la longueur de la côte de Grande-Bretagne (îles et Irlande comprises). Qu'observe-t-on ? Expliquer ce phénomène.

L'étude des deux exemples précédents amène à définir une nouvelle dimension $D_b$, dite dimension de boîte, telle que :

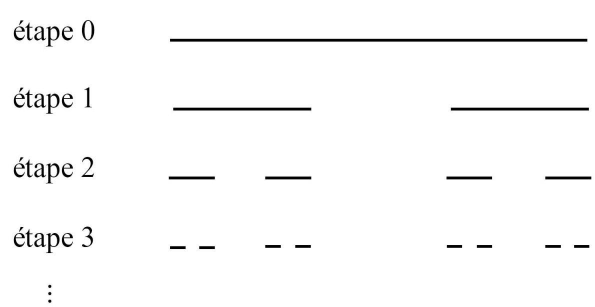
$$D_b = \lim_{\epsilon \to 0} \left| \frac{\ln(N(\epsilon))}{\ln(\epsilon)} \right|.$$

Cette dimension $D_b$ mesure alors le degré de complexité de $\mathcal{S}$ : plus $\mathcal{S}$ sera "torturé", plus $D_b$ sera grande. On dit qu'un ensemble est fractal si sa dimension de boîte est strictement supérieure à sa dimension topologique.
Chercher dans la littérature ou sur internet d'autres exemples d'objets fractals et donner leur dimension de boîte.

# 2 Un exemple d'objet fractal : l'ensemble de Cantor

Un exemple classique d'ensemble fractal est l'ensemble de Cantor que l'on construit itérativement de la façon suivante (cf. article ci-joint et figure ci-dessous) :

• On part du segment [0,1] que l'on coupe en trois segments fermés de même longueur et on élimine le segment central.
• On coupe ensuite chaque segment restant en trois segments de longueur égale et on rejette à chaque fois le segment central.
• On itère ensuite indéfiniment ce processus. Les points non éliminés après une infinité d'étapes forment l'ensemble de *Cantor* $\mathcal{K}_3$.




1. Montrer que $\mathcal{K}_3$ est formé des réels $x$ de la forme :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n},$$

   avec $a_n \in \{0, 2\}$ (On pourra raisonner en base 3).
   En déduire que $\mathcal{K}_3$ est indénombrable (c'est-à-dire qu'on ne peut pas le mettre en bijection avec $\mathbb{N}$).
   **Indication** : on pourra raisonner en base 2 et montrer que tout élément de $[0, 1]$ peut s'écrire $x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n 2^{-n}$ avec $b_n \in \{0, 1\}$, puis mettre en bijection les suites $a_n$ et $b_n$.
2. Montrer que $\mathcal{K}_3$ est un ensemble mesurable et calculer sa mesure.
3. Calculer la dimension de boîte de $\mathcal{K}_3$.
4. *Questions subsidiaires*

   (a) Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

(b) Montrer que $\mathbb{R}$ est indénombrable.

(c) Montrer qu'il n'existe pas d'homéomorphisme (bijection continue et d'inverse continue) entre le segment $[0,1]$ et le carré $[0,1] \times [0,1]$.

(d) Calculer la dimension de boîte de la courbe de Peano (cf. article)

# 3 Ensembles fractals et théorème du point fixe

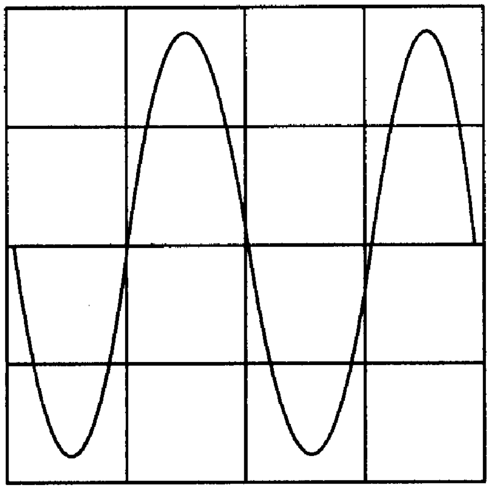
On considère l'espace affine $\mathcal{F}$ des fonctions continues $f$ de $I = [0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. On dote $\mathcal{F}$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|$ pour laquelle $\mathcal{F}$ est complet. Pour tout $f \in \mathcal{F}$ on définit $T(f) \in \mathcal{F}$ par :

$$T(f)(x) = \begin{cases} 2f(3x)/3, & x \in [0,1/3] \\ 2/3 - f(3x-1)/3, & x \in [1/3,2/3] \\ 1/3 + 2f(3x-2)/3, & x \in [2/3,1] \end{cases}$$

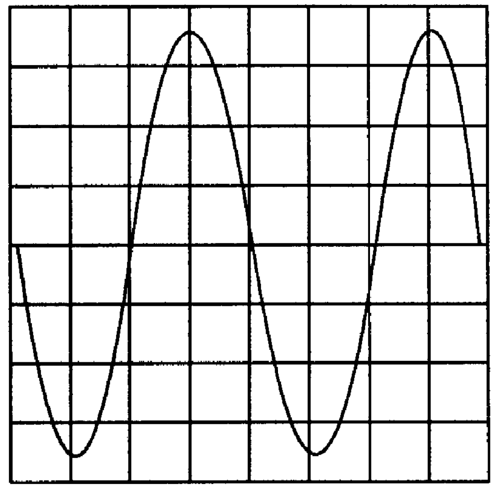
1. Montrer que $T(f)$ ainsi définie appartient bien à $\mathcal{F}$.
2. Montrer que $T$ est k-Lipshitzienne, pour un $k$ que l'on précisera.
3. Déduire de la question précédente l'existence d'une fonction $f$ (dite fonction de Bolzano) telle que $T(f) = f$. On admettra le théorème du point fixe de Banach qui énoncé que toute application k-Lipschitzienne de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ avec $k < 1$ admet un point fixe dans $\mathcal{F}$.
4. Tracer l'allure de cette fonction (on pourra la construire récursivement comme limite de $f_n = T^n(f_0)$, avec $f_0(x) = x$). Que pensez-vous de sa dérivabilité ?
5. Calculer la dimension fractale de la fonction de Bolzano.

# Dimension fractale d'une sinusoïde

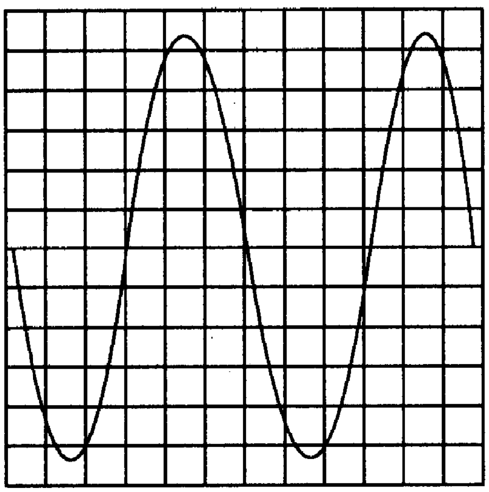
Echelle
1/4



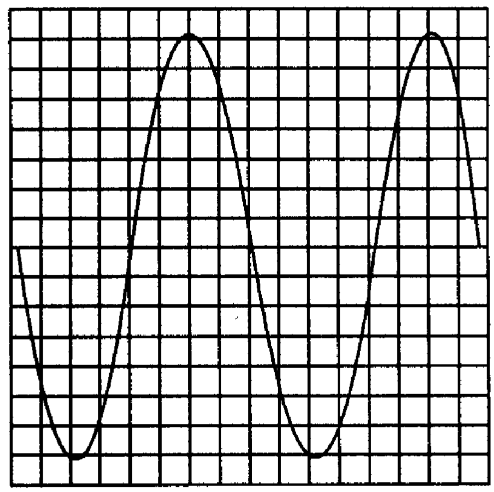
Echelle
1/8



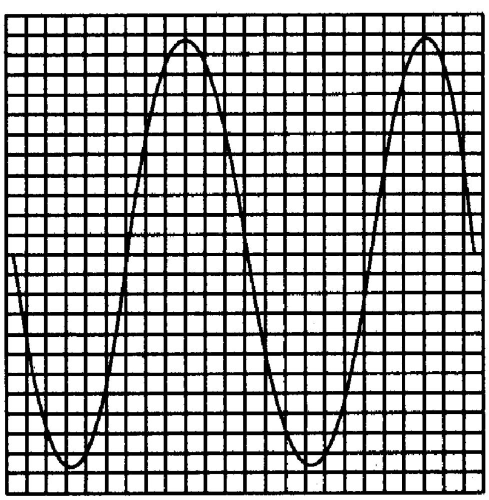
Echelle
1/12



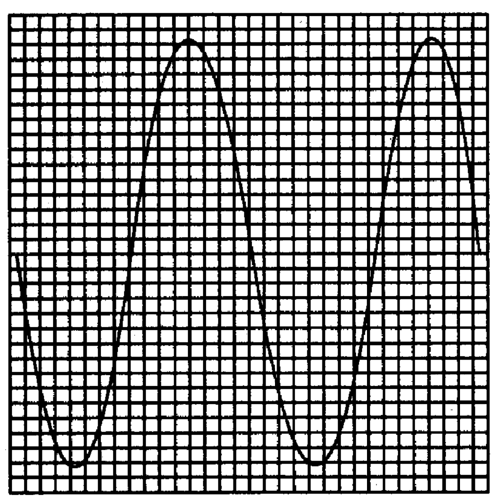
Echelle
1/16



Echelle
1/24

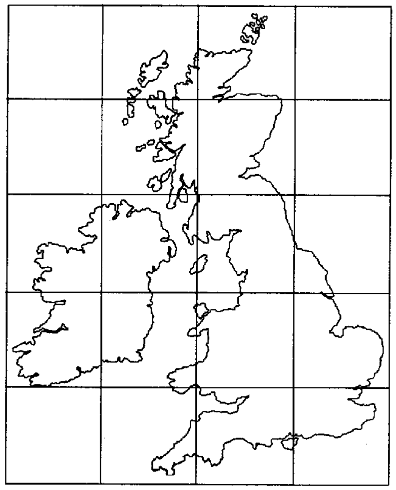


Echelle
1/32

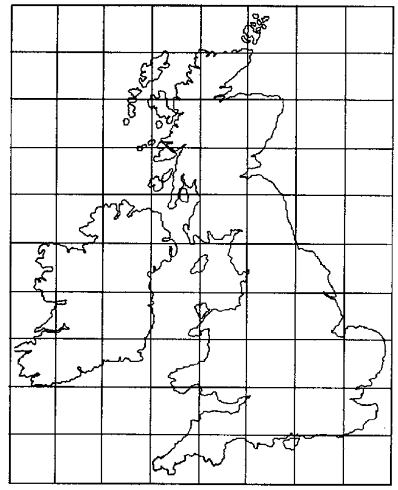


| Echelle 1/ε | 4 | 8 | 12 | 16 | 24 | 32 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N(ε) | | | | | | 135 |

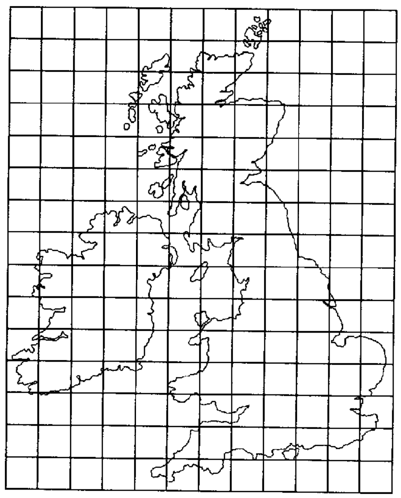
# Dimension fractale de la côte de Grande-Bretagne



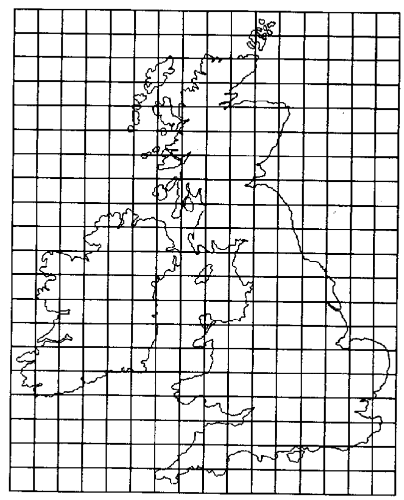
Echelle 1/4



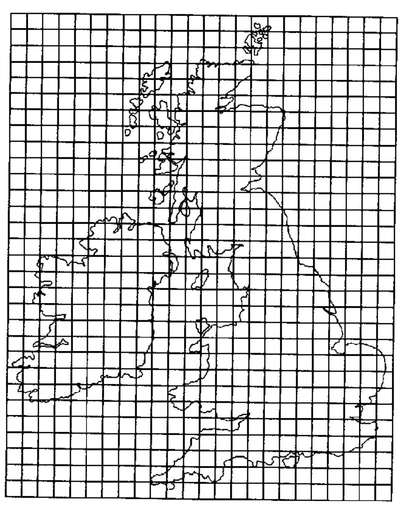
Echelle 1/8



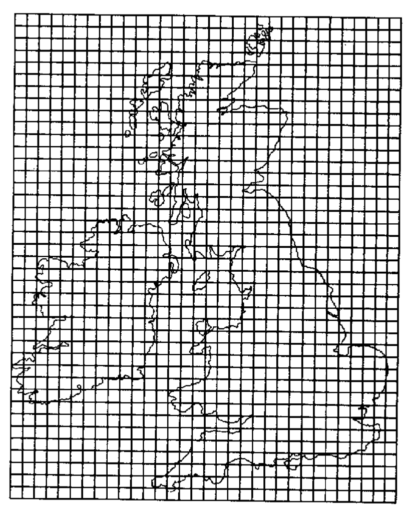
Echelle 1/12



Echelle 1/16



Echelle 1/24



Echelle 1/32

| Echelle 1/ε | 1/4 | 1/8 | 1/12 | 1/16 | 1/24 | 1/32 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N(ε) | | | | | | 283 |

# Labyrinthes de longueur infinie

On sait depuis plus d'un siècle que certaines courbes recouvrent une surface en n'oubliant aucun point, mais il en existe de plusieurs types, plus ou moins régulières. On utilise aujourd'hui ces courbes en informatique.

Dans la cathédrale de Chartres, une étrange courbe est gravée sur le dallage de pierre. En suivant son tracé, vous ferez une promenade de 262 mètres qui, du point de départ situé sur le bord d'un disque d'un diamètre de 13 mètres, vous mènera au centre sans quitter le disque, sans jamais revenir au même point et en passant partout dans le disque ; à l'inverse de la lumière qui emprunte le plus court chemin pour relier deux points, l'artiste a choisi de joindre le bord et le centre en empruntant l'itinéraire le plus contourné possible. Ces labyrinthes ou « lieues » existent dans d'autres cathédrales françaises : à Amiens le disque est devenu un octogone, à Saint-Omer le méandre décrit un carré, à Reims le chemin – effacé en 1779 – explorait une figure en forme de château fort.

Ces tracés, suivis à genoux par les pénitents du Moyen Âge, symbolisaient la longue et tortueuse route vers Jérusalem. Au centre du dessin de la cathédrale de Chartres, une plaque de cuivre représentait le combat de Thésée et du Minotaure. Malgré leur nom et la référence au mythe antique, ces figures ne sont pas vraiment des labyrinthes, car il est impossible de s'y perdre : une fois entré, en se laissant guider par le dessin, l'arrivée au but est certaine. Ces parcours sont en fait des esquisses de ce que les mathématiciens appellent aujourd'hui des courbes « remplissant l'espace » ou courbes de Peano. Leur importance dans l'histoire des mathématiques est grande, car elles ont précisé la notion de dimension et nous ont obligés à mieux cerner la nature du continu.

Comme bien souvent, ces recherches menées par des théoriciens avec l'unique souci d'approfondir leur compréhension de l'univers mathématique ont été utiles ailleurs. Aujourd'hui ces cheminements agités sont utilisés en physique – par exemple pour concevoir des antennes –, et dans diverses branches de l'informatique où leurs errances alambiquées à l'extrême sont des guides pour visiter dans un trajet unique et ininterrompu tous les points d'un espace multidimensionnel. Mais revenons à l'histoire de leur découverte mathématique.

Le 20 juin 1877, George Cantor écrit à Richard Dedekind que, bien « qu'opposé à l'opinion généralement répandue », il sait « depuis des années » qu'on peut mettre en bijection une ligne et un morceau de surface. Plus précisément, Cantor affirme qu'il existe une fonction $M$ qui fait correspondre élément par élément ($M$ est bijective) les nombres réels du segment $[0,1]$ (les $x$ compris entre 0 et 1) et les points du carré $C = [0,1] \times [0,1]$.

## L'intuition malmenée

L'idée est qu'il existe une fonction $M$ qui associe à chaque nombre réel $t$ compris entre 0 et 1 écrit sous forme décimale $0,a_0\,a_1\,a_2 \ldots\, a_n \ldots$, deux nombres réels $x(t)$ et $y(t)$ en retenant les chiffres d'indice pair dans $x(t) = 0,a_0\,a_2\,a_4 \ldots\, a_{2n} \ldots$, et ceux d'indice impair dans $y(t) = 0,a_1\,a_3\,a_5 \ldots\, a_{2n+1} \ldots$

Ces deux nombres réels définissent un point $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$ qui appartient au carré $C$. Tout point du carré $C$ est l'image par $M$ d'un $t$ au moins : la fonction $M$ est « surjective » de $I$ sur $C$. À vrai dire, comme Dedekind le fait remarquer à Cantor dans sa réponse, la fonction surjective $M$ n'est pas tout à fait bijective, car il existe des paires de valeurs différentes de $t$ qui donnent le même point $M$. Cela est dû aux développements décimaux se terminant par une infinité de 9. Par exemple : 0,409090909… et 0,5 donnent tous les deux le même point $M = (0,5 ; 0)$ car 0,409090909… donne $M = (0,49999\ldots ; 0,00000\ldots) = (0,5 ; 0)$ et évidemment, 0,500000… donne $M = (0,5 ; 0)$.

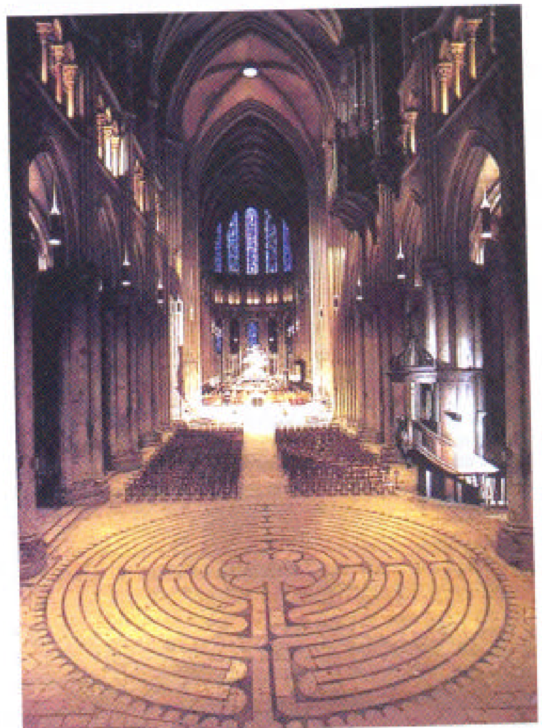
Rappelons que 0,49999… = 0,5 car si l'on pose $x = 0,49999\ldots$ on voit que $10\,x - x = 4,99999\ldots - 0,49999 = 4,5$ et donc $9\,x = 4,5$ ; c'est-à-dire $x = 0,5$.

Heureusement l'application surjective de $I$ sur $C$ peut par une opération (assez compliquée) être modifiée de manière à ce qu'elle devienne bijective. De toutes les façons, un théorème, nommé théorème de Cantor-Bernstein, indique qu'il existe bien une bijection entre l'intervalle $I$ et le carré $C$.

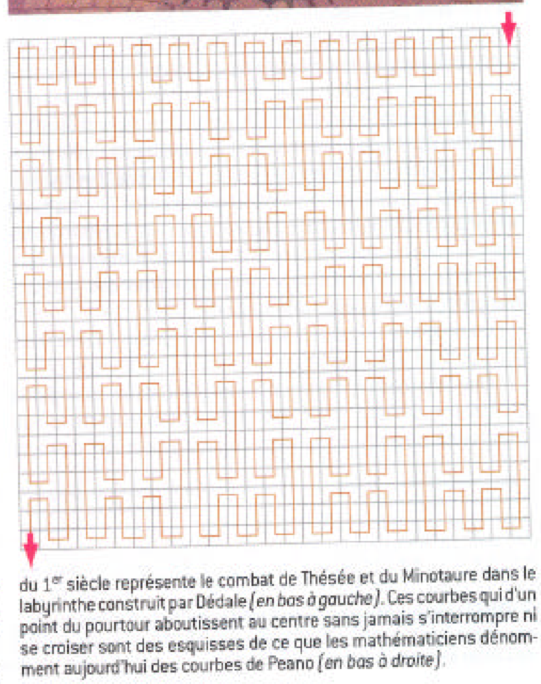
C'est troublant, car l'intuition des mathématiciens leur souffle que l'infini d'une ligne n'est pas de même nature que l'infini d'une surface. Que l'on sache les mettre en bijection est inattendu, voire déconcertant. La solution de cet apparent

Jean-Paul Delahaye

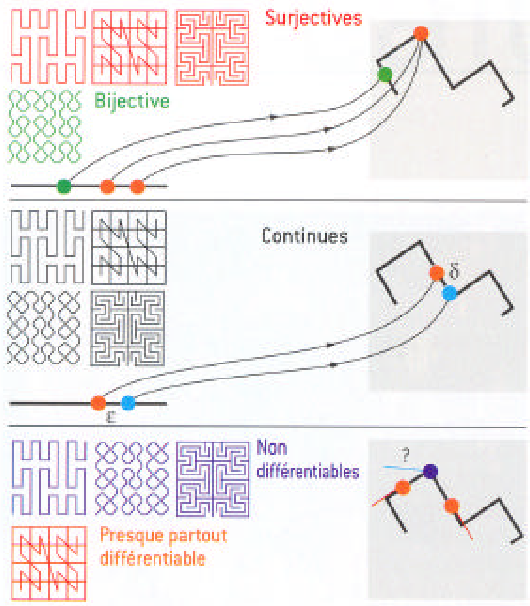
Collection particulière



Collection particulière



**1. Les labyrinthes historiques.** Labyrinthe sur le statère d'argent crétois de 450 av. J.-C *(médaillon du haut)*. Labyrinthe du pourpoint du gentilhomme peint par Bartolomeo Veneto au XIV[e] siècle *(en haut à gauche)*. Dans plusieurs cathédrales françaises, comme à Chartres, un labyrinthe est dessiné au sol *(en haut à droite)*. La mosaïque romaine du 1[er] siècle représente le combat de Thésée et du Minotaure dans le labyrinthe construit par Dédale *(en bas à gauche)*. Ces courbes qui d'un point du pourtour aboutissent au centre sans jamais s'interrompre ni se croiser sont des esquisses de ce que les mathématiciens dénomment aujourd'hui des courbes de Peano *(en bas à droite)*.




**2. Les courbes de type Peano** résultent d'une transformation qui fait passer d'un segment *I* à une surface, généralement un carré. Toutes ces courbes sont surjectives (tous les points du carré correspondent à au moins un point du segment). La courbe de Osgood est bijective, mais ne recouvre qu'une partie du carré. Toutes ces courbes sont continues. La position d'un point sur le segment est repérée par la valeur du nombre réel *t* et ces courbes ne possèdent en général de tangente pour aucune valeur de *t* du segment. La courbe de Lebesgue possède, elle, des tangentes pour presque toute valeur de *t*.

paradoxe viendra de la continuité : ni la fonction surjective de la lettre de Cantor ni celle bijective tirée du théorème de Cantor-Bernstein ne sont continues (deux points proches de *I* ne sont pas toujours proches dans *M*).

Dès 1879, le mathématicien allemand Eugen Netto (1848-1919) rassure la communauté troublée des mathématiciens en démontrant le résultat suivant : il n'existe pas de fonction continue et bijective de l'intervalle $I=[0,1]$ dans le carré $C=[0,1]\times[0,1]$. L'intuition est sauve : l'infini d'une ligne n'est pas l'infini d'une surface ! Si l'on peut mettre en bijection un segment et une surface, cette bijection est discontinue, ce qui signifie qu'elle ne préserve pas la nature topologique du segment, conformément à ce que nous soufflait notre intuition. Cependant la boîte de Pandore était ouverte et bien des surprises surgiront des fonctions envoyant un intervalle sur une surface.

La première question soulevée est : *Existe-t-il une fonction continue et surjective de l'intervalle I sur le carré C ?*

Une telle fonction continue définit une courbe assimilable au mouvement d'un point : pendant un intervalle de temps d'une unité, un point *M(t)* se déplace sans jamais faire de sauts brusques, partant de *M*(0) pour arriver à *M*(1). Si la fonction est surjective, le point *M* passe partout dans le carré. Qu'une courbe (continue) couvre complètement une surface semblait déraisonnable et on pensait donc démontrer qu'il n'existe aucune fonction continue surjective de *I* sur *C*.

Or les courbes continues recouvrant un bout de plan existent bel et bien. La première du genre fut proposée par Giuseppe Peano (1858-1932), un mathématicien italien à qui l'on doit l'utilisation du symbole ∈ et dont le nom reste attaché aux axiomes de l'arithmétique... bien qu'en réalité, ils aient été formulés par Dedekind le correspondant de Cantor.

## Agitation infinie dans un carré

Dans son article de 1890 (publié en français et joliment intitulé *Sur une courbe qui remplit toute une aire plane*), la courbe de Peano est définie de manière purement analytique par un procédé analogue à celui de Cantor, mais utilisant la base de numération trois. Elle laisse sur sa faim le géomètre qui aimerait visualiser comment un point peut, en un temps fini, passer continûment partout dans un carré, et même plusieurs fois par certains points (puisque la courbe n'est pas bijective).

On comprend géométriquement cette transformation en la voyant comme la limite des courbes, chacune un peu plus alambiquée que les précédentes. La courbe continue de Peano, *P*, est définie comme la limite de courbes $P_1$, $P_2$, $P_3$, etc. *(voir la figure 4)*. Le dessin de la courbe $P_1$ est obtenu en divisant le carré *C* en 9 carrés égaux de côté 1/3, et en décidant d'un ordre de parcours de ces 9 carrés. La courbe $P_2$ se déduit de la courbe $P_1$ en divisant chacun des 9 carrés utilisés pour dessiner $P_1$ en neuf carrés plus petits (ce qui en fait donc 81) et en parcourant à chaque fois les neuf carrés selon le même ordre que celui utilisé pour $P_1$. Etc.

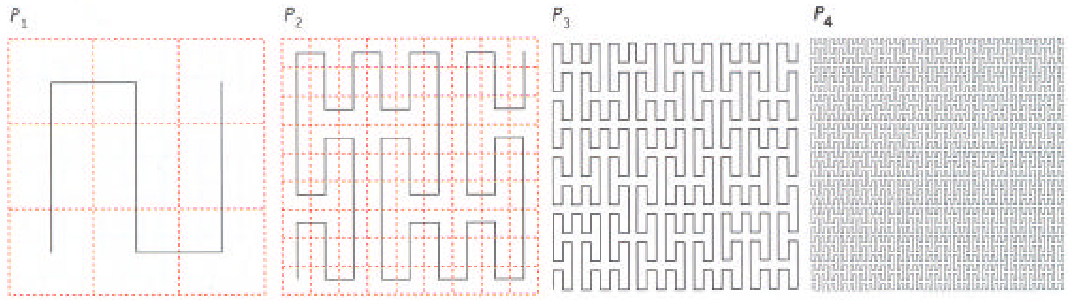
Chacune des courbes $P_i$ est continue. Mais attention, la limite d'une suite de courbes continues n'est pas nécessairement continue : le grand mathématicien Augustin Cauchy était tombé dans ce piège. La démonstration que la courbe limite est encore continue se fonde sur ce que la déformation qu'on opère pour passer de la courbe *n* à la courbe *n* +1 ne demande que d'étirer localement le tracé en déplaçant les points d'une distance petite. La distance entre le point $P_n(t)$ de la courbe $P_n$ et le point $P_{n+1}(t)$ de la courbe $P_{n+1}$ est inférieure à $2/3^n$, car ces deux points sont dans le même carré de côté $1/3^n$.

Plusieurs questions se posent à propos de cette courbe limite, car même si son existence mathématique et sa propriété d'être continue ne font pas de doute, elle malmène toujours notre sens géométrique.

**Question 1.** *Comment est-on certain que la courbe passe par tous les points du carré ?*

On sait que la courbe passe partout dans le carré, car si on se fixe un point quelconque *N* du carré en repérant sur la courbe $P_n$ le point $N_n$ le plus proche de *N*, il est clair que la limite des points $N_n$ sera *N* (les courbes $P_n$ suivent des tracés de plus en plus serrés n'oubliant aucune zone du carré), et donc la limite des points $t_n$ de [0,1] tels que $P_n(t_n) = N_n$ sera un nombre *t* tel que $P(t) = N$. Dit simplement, les courbes $P_n$ s'agitent de plus en plus sans oublier le moindre espace et cela a pour conséquence que la courbe limite recouvre vraiment tout point du carré.


**3. Différentes étapes vers l'ensemble de Cantor** obtenu en prélevant le tiers de chaque segment, jusqu'à l'infini. L'ensemble de Cantor est la poussière qui subsiste.




**4. La courbe de Peano.** Giuseppe Peano propose en 1890 une courbe qui passe par tous les points du carré. Une telle courbe est impossible à dessiner, car elle est infiniment repliée sur elle-même. En revanche, on imagine le trajet d'un point $P$ décrivant cette courbe en considérant des courbes approchées $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, etc., et dont la longueur tend vers l'infini. La courbe de Peano ne possède de tangente en aucun point. C'est aussi un labyrinthe, car le chemin constitué par la courbe mène du coin en haut à droite au coin en bas à gauche.

Ce qui choque l'intuition est peut-être que chaque courbe $P_n$ a une aire nulle (aucune n'a d'épaisseur) alors que la courbe limite, soudainement, a une épaisseur. Même si c'est étonnant, c'est possible, et la preuve en est que... c'est justement ce que l'on constate ici ! Parfois l'intuition est dans l'erreur et doit être reconstruite pour se conformer à la réalité démontrée ; la courbe de Peano est l'exemple même d'un de ces ajustements inévitables que la réalité mathématique impose.

**Question 2.** *Quels sont les points où la courbe passe plusieurs fois ? De tels points existent nécessairement d'après le théorème de Netto.*

Les points du carré visités plusieurs fois par la courbe $P$ sont des sommets des carrés qu'on dessine étape après étape (9 carrés, puis 81, etc.) quand on construit $P_n$, c'est-à-dire des points dont les coordonnées sont de la forme $[a/3^n ; b/3^n]$ avec $a$ et $b$ entiers. Certains de ces points sont visités deux fois, d'autres le sont quatre fois.

Les points où la courbe passe plusieurs fois sont en quantité infinie, mais constituent un ensemble infiniment mince, car ils sont dénombrables (il y en a autant que de nombres entiers) alors que les autres points du carré (visités une seule fois) constituent un ensemble beaucoup plus gros (non dénombrable). En un sens, la courbe de Peano est donc « presque » une bijection entre $I$ et $C$.

**Question 3.** *Quelle est la longueur de la courbe limite ?*

Infinie ! Ce n'est guère surprenant : elle ne pourrait pas passer partout si elle avait une longueur finie ! La longueur de chacune des courbes $P_1$, $P_2$, $P_3$ ... augmente indéfiniment et tend vers l'infini quand $n$ augmente. Précisément, la longueur de $P_1$ est $(3^2 - 1)/3$ ; la longueur de $P_2$ est $(3^4 - 1)/3^2$, ..., la longueur de $P_n$ est $(3^{2n} - 1)/3^n$. Une propriété curieuse de la courbe $P$ est la suivante : non seulement la longueur totale de la courbe est infinie, mais si vous choisissez deux points du carré $P(t)$ et $P(t')$, même si $t$ et $t'$ sont très proches, la longueur du morceau de courbe joignant $P(t)$ à $P(t')$ est infinie : tous les points sont deux à deux à distance infinie pour celui qui suit la courbe !

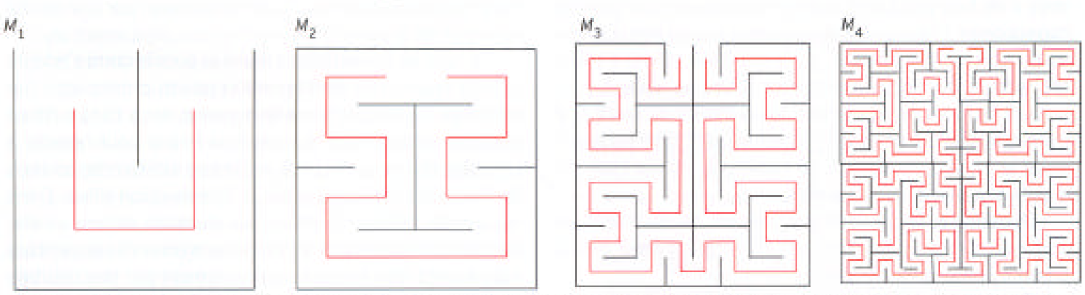
**Question 4.** *Une particule de notre monde physique pourrait-elle suivre le mouvement décrit par la courbe ?*

Non, car la courbe de Peano ne possède nulle part de tangente, c'est-à-dire de vitesse. Peano, dans son article de 1890, écrivait que les fonctions continues donnant l'abscisse et l'ordonnée du point $P$ « manquent toujours de dérivée ». Des démonstrations rigoureuses de ce fait ne vinrent que plus tard et la plus simple, due à Hans Sagan, a été publiée au début des années 1990. Une particule suivant la courbe de Peano change de direction infiniment souvent dans n'importe quel intervalle de temps, aussi petit soit-il ; pour la diriger, il faudrait donc lui appliquer en permanence une force infinie. Aucun espoir de rencontrer cela dans la nature.

## Hilbert, Moore et les autres

Pour être certain d'un résultat mathématique, la meilleure méthode n'est pas toujours de refaire la démonstration proposée par celui qui a découvert le résultat, car on risque d'être aveuglé par ses erreurs, s'il y en a, et de se laisser convaincre à tort. Il est plus efficace de redémontrer par une voie différente le résultat incertain.

C'est ce que firent David Hilbert (1862-1943) en 1891 et Eliakim Moore (1862-1932) en 1900. La courbe de Hilbert est




**5. La courbe de Moore** dont les premières étapes de construction sont ici présentées est une variante de la courbe de Hilbert. Ces courbes sont des courbes de type Peano fondées non pas sur un découpage du carré en 9, mais en quatre carrés.

plus simple que celle de Peano, car elle est fondée sur un découpage du carré en 4 carrés et non 9. De plus, elle se généralise facilement à l'espace de dimension 3 produisant une courbe qui remplit un cube et s'adapte sans mal aux dimensions plus grandes (voir le site de Gary Teachout, *Fractal Space Filling Curves*, 2002 : http://www.seanet.com/~garyteachout/fill.html).

La courbe de Moore est une légère variante de la courbe de Hilbert, mais possède la propriété intéressante de revenir à son point de départ : avec elle, vous parcourrez tout le carré et regagnerez votre point de départ à l'issue de la promenade *(voir la figure 5)*. L'histoire ne s'arrête pas là car, malgré ces nouvelles courbes remplissant l'espace, plusieurs questions restent en suspens.

**Question 5.** *Une courbe continue recouvrant un carré peut-elle être différentiable, c'est-à-dire posséder des tangentes, au moins en certains points ?*

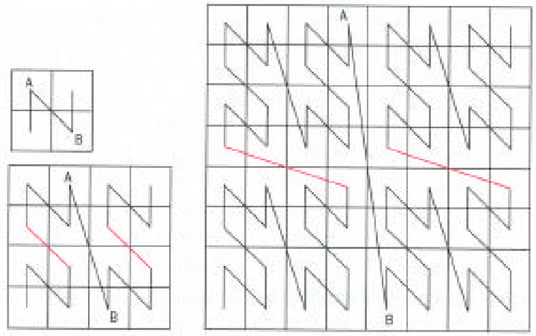
Cette interrogation a été résolue par le mathématicien français Henri Lebesgue (1875-1941), là encore d'une manière étonnante : la courbe de Lebesgue, comme la courbe de Peano, est continue, surjective de $I$ sur $C$ et, de plus, presque partout différentiable. Presque partout signifie qu'en chaque point $t$ de l'intervalle $I$, sauf pour un ensemble sans épaisseur, la courbe possède un vecteur tangent en $M(t)$, et donc une vitesse.

L'astuce qui permet cette merveille est l'ensemble triadique de Cantor. Cet ensemble est le résultat de la construction suivante : on part de $I$, on en enlève le tiers médian ]1/3, 2/3[ (les crochets tournés vers l'extérieur signifient que 1/3 et 2/3 sont exclus) ; on enlève alors le tiers médian des deux intervalles restants ]1/9, 2/9[ est enlevé à [0,1/3], ]7/9, 8/9[ est enlevé à [2/3, 1] ; on poursuit en enlevant le tiers médian des quatre intervalles laissés par l'opération précédente, etc. Ce qui reste à la fin est l'ensemble triadique de Cantor.

Cet ensemble non dénombrable est de mesure nulle (on peut l'enfermer en totalité dans des intervalles dont la longueur totale est 1/10, 1/100, 1/1000, etc., c'est-à-dire aussi petits que l'on veut) ; la courbe de Lebesgue est partout différentiable sauf lorsque $t$ est dans cet ensemble de Cantor. En pratique, le point $M$ se déplace à vitesse constante sur une droite pendant un tiers du temps (quand $t$ est dans le tiers médian ]1/3, 2/3[). De même, le point se déplace à vitesse constante quand $t$ est dans chacun des tiers médians enlevés lors de la deuxième étape de construction de l'ensemble de Cantor (]1/9, 2/9[ et ]7/9, 8/9[). Etc. La vitesse est donc définie partout sauf lorsque $t$ appartient à l'ensemble triadique de Cantor. C'est assez étrange à nouveau, mais il ne faut pas croire que le mouvement d'un point $M$ correspondant à la courbe de Lebesgue pourra être observé dans notre monde matériel, car la difficulté, même si elle a été repoussée dans un ensemble sans épaisseur, persiste. Il faudrait appliquer une force infinie au point $M$ à chaque fois qu'il passe dans l'ensemble de Cantor pour qu'il suive le tracé de la courbe de Lebesgue, ce qui bien sûr n'a physiquement pas de sens.

**Question 6.** *Peut-on recouvrir un morceau du plan d'aire non nulle par une courbe continue et injective, c'est-à-dire ne passant jamais deux fois par le même point ?*

Cela est impossible, on le sait, pour le carré, mais il existe d'autres parties du plan d'aire non nulle ! La réponse positive donnée à cette question montre que la géométrie des courbes continues est résolument subtile.



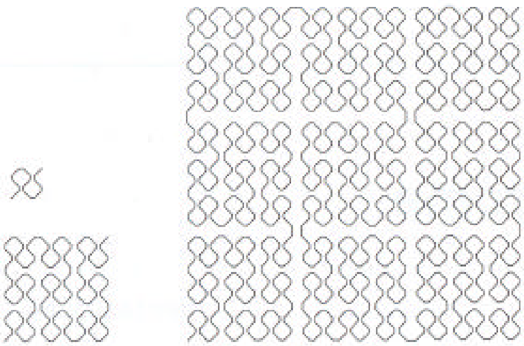

**6. La courbe de Lebesgue** possède des tangentes pour presque toute valeur de $t$ paramétrant la position sur le segment $I$ de longueur unité. Ses versions d'ordre fini, contrairement aux courbes précédentes, ne sont pas parcourues à vitesse uniforme, mais de façon que le point mobile atteigne $A$ à l'instant $t = 1/3$ et $B$ à l'instant $t = 2/3$ et qu'entre $A$ et $B$ le point possède une vitesse constante. De même, sur les traits en rouge, le parcours se fait à vitesse constante (entre les instants $t = 1/9$ et $t = 2/9$, et entre les instants $t = 7/9$ et $t = 8/9$, etc.). Ces intervalles où la vitesse est imposée sont les intervalles qu'on enlève lors de la construction de l'ensemble de Cantor. L'ensemble de Cantor qui n'a pas d'épaisseur concentre en lui tous les points où la courbe de Lebesgue change de direction : en conséquence, la courbe de Lebesgue possède une tangente sauf lorsque $t$ appartient à un ensemble sans épaisseur. Elle est donc différentiable pour presque tout $t$ du segment $I$ – tout en étant, bien sûr, continue et surjective.

On ne peut recouvrir le carré par une courbe continue ne passant pas deux fois par le même point, indique le théorème de Netto ; pourtant la courbe découverte par le mathématicien américain William Osgood (1864-1943) en 1894 est continue, ne repasse pas deux fois par le même point, et recouvre un ensemble (contenu dans le carré $C$) dont l'aire vaut 1/2. En modifiant la construction, l'aire de la surface recouverte peut être n'importe quel nombre strictement inférieur à 1.

L'astuce est la suivante : on reprend la construction de la courbe de Peano, mais avec des rétrécissements détaillés sur la figure 7. Les rétrécissements sont faits de telle façon que l'espace total oublié (celui entre les carrés retenus) possède une surface égale à 1/4 + 1/8 + 1/16 + ... somme infinie qui vaut 1/2. La courbe limite recouvre donc un ensemble ayant pour aire $s = 1 - 1/2 = 1/2$.

**Question 7.** *Qu'en est-il des espaces de dimension infinie ? Quels sont les sous-ensembles du plan ou de l'espace qui peuvent être exactement parcourus par une courbe comme l'est le carré ?*

Le type de constructions menées pour le carré s'adapte à toute figure d'un seul tenant et pas trop découpée (un rectangle, un disque, une ellipse pleine, etc.), car il suffit de déformer continûment la courbe de Peano pour l'ajuster à la surface en question. On réussit même à définir des courbes de Peano dans le cas d'espaces de dimension infinie. Dans les années 1920 en procédant en plusieurs étapes, on élabora une caractérisation topologique précise des ensembles qui peuvent être recouverts exactement par des courbes continues. C'est le théorème de Hahn-Mazurkiewicz qui énonce donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'une



**7. La courbe de Osgood** est continue et ne passe jamais deux fois par un même point contrairement aux courbes précédentes. Elle recouvre un sous-ensemble du plan d'aire 1/2 (pas tout un carré car, si c'était le cas, elle contredirait le théorème de Netto). Cette courbe réalise l'impossible : une bijection continue entre une ligne et une partie du plan d'aire non nulle. Sa construction reprend l'idée de la courbe de Peano en modifiant la taille des carrés utilisés à chaque étape. On rétrécit les neuf carrés de la première étape de manière à ce qu'ils ne se touchent plus et que l'espace entre les carrés ait pour aire 1/4. À la seconde étape, on rétrécit encore les carrés découpant ces neuf carrés en laissant un espace supplémentaire entre les carrés d'aire totale 1/8, etc. Les rétrécissements permettent à la courbe limite de n'avoir aucun point double et ils sont faits de telle façon que l'espace total oublié (celui entre les carrés retenus) possède une aire égale à : 1/2 = 1/4 + 1/8 + 1/16 + ... L'aire omise étant 1/2, l'aire couverte est aussi 1/2.

partie *E* (d'un espace topologique) possède une courbe de Peano. Cette condition – que nous indiquons ici pour le plaisir des initiés et dont le charme ésotérique réjouira les autres lecteurs – est que *E* doit être « compact, connexe et localement connexe ».

L'heure est venue de la mise en œuvre dans d'autres disciplines des outils créés par les mathématiciens. Certaines utilisations de ces courbes ont été proposées pour la conception d'antennes où il semble que grâce à elles, on obtient sous un volume réduit des propriétés qui autrement auraient conduit à des formes trop volumineuses. C'est cependant dans l'informatique que les courbes de Peano se sont imposées.

## Utilisation en informatique

La propriété fondamentale des courbes de Peano et des courbes finies qui les approchent est qu'elles sont resserrées et pas trop agitées en regard des zones balayées : elles fournissent des parcours complets d'espaces multidimensionnels en énumérant de manière groupée les points d'une même zone, ces parcours étant souvent à la fois exhaustifs et économiques.

Imaginons, par exemple, que nous ayons à mémoriser des données associées à des points d'un espace de dimension 2. C'est le cas quand on veut mémoriser une image qui n'est que l'association d'une couleur à chaque pixel d'un tableau de points repérés par leurs deux coordonnées, mais c'est le cas dans bien d'autres situations et en particulier dans la gestion des bases de données. Les supports de la mémoire informatique sont souvent des structures de dimension 1, correspondant par exemple à une bande magnétique, à une piste de disque, ou à une position dans un ensemble d'unités numérotées linéairement par des entiers croissants.

L'idée la plus simple consiste à ranger dans l'ordre tous les éléments de la première ligne du tableau, suivis de tous les éléments de la seconde ligne, etc. Un tel rangement linéaire sera très commode lorsque l'on voudra lire une suite de données prises dans une même ligne : on positionnera la tête de lecture sur le premier point à lire et les autres viendront les uns après les autres en se suivant. En revanche, si on doit lire une série de données correspondant à des points appartenant à une même colonne, le système de lecture devra dérouler une grande partie de la bande ou parcourra en grande partie le rangement linéaire piquant de-ci de-là une donnée pertinente. Cela se traduira par un long temps de lecture, ce qui pourra être gênant si l'opération doit être fréquemment répétée.

Si on doit lire les données autour d'un point, par exemple dans une petite boule centrée sur un point de coordonnées $[x ; y]$, la structure de stockage ligne par ligne à nouveau se montre assez mauvaise. Le stockage colonne par colonne n'est bien sûr pas meilleur, et aucun stockage linaire ne sera parfaitement adapté à toute commande de lecture multiple. On comprend cependant qu'un stockage suivant le parcours emprunté par une courbe de Peano aura des avantages : il trouvera (assez souvent) proches les uns des autres dans son rangement linéaire les points qui sont proches géométriquement, c'est-à-dire dont les coordonnées multidimensionnelles s'écartent peu les unes des autres. L'étude et l'expérience confirment cette idée et les courbes de Peano ont donc été soigneusement examinées et comparées de manière à identifier, selon les problèmes, lesquelles sont les mieux adaptées et minimiseront les temps d'accès aux données. La courbe de Lebesgue (appelé alors Z-curve) est souvent intéressante, mais d'autres ont récemment été introduites approfondissant, plus d'un siècle après leur découverte, la compréhension des labyrinthes mathématiques de Cantor et Peano.

Une fois encore, l'idée que de belles mathématiques, longtemps restées sans application, peuvent soudainement se révéler importantes s'est montrée exacte. L'informatique semble d'ailleurs une grande consommatrice de mathématiques et sa soif de résultats abstraits et difficiles montre que contrairement à ce que l'on a parfois dit, l'ordinateur ne dispense pas de faire des mathématiques, il les rend indispensables.

### Auteur & Bibliographie

**Jean-Paul DELAHAYE** est professeur d'informatique à l'Université de Lille.

G. TEACHOUT, *Fractal Space Filling Curves*, 2002 : http://www.sea-net.com/ffgaryteachout/fill. html

M. MOKBEL, W. AREF et I. KAMEL, *Performance of MultiDimensional Space Filling Curves*, GIS'02, ACM, November 8–9, 2002, McLean, Virginia, USA, 2002.

T. ASANO, D. RANJAN, T. ROOS, E. WELZL et P. WIDMAYER, *Space Filling Curves and Their Use in the Desing of Geometric Data Structures*, in *Theoretical Computer Science*, TCS, 181(1)-3, 3-15, 1997.

H. SAGAN, *Space Filling Curves*, Springer-Verlag, 1994.

Programmes de dessins de courbes de Peano :
http://www.cs.utexas.edu/users/vbb/misc/sfc/0index.html