Tutorat 3

Méthode de la phase stationnaire

Frédéric Chevy – chevy@lkb.ens.fr

L'objet de ce tutorat est l'étude d'intégrales du type

$$\int f(x)e^{zg(x)}dx,$$

où z peut éventuellement être complexe. Bien qu'en règle générale, il soit impossible d'en obtenir une expression en terme de fonctions usuelles (cf. par exemple la fonction Γ ci-dessous) nous allons montrer que dans la limite où $|z|$ tend vers l'infini, le comportement de ces fonctions est relativement simple à décrire.

Notations : Soit A un ensemble et $B \subset A$, alors $A\backslash B$ désigne le complémentaire de B dans A. On rappelle que la fonction Γ est définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\lambda-1}\, dx, \tag{1}$$

avec en particulier $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

1 Méthode de Laplace

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On définit sur I deux fonctions f et g à valeurs réelles possédant les propiétés suivantes :

- g est continue sur I et possède un unique maximum absolu en $x_0 \in I$ distinct d'une des bornes de I. On suppose de plus qu'il existe deux réels strictement positifs α et μ tels qu'on ait en x_0 :

$$g(x) - g(x_0) \sim -\alpha|x - x_0|^\mu.$$

- f est continue sur I avec $f(x_0)\, ot = 0$.
- $\forall\lambda > 0$, l'intégrale

$$F(\lambda) = \int_I |f(x)|e^{\lambda g(x)}dx$$

  est convergente.

Dans la suite, on cherche le comportement de F pour les grandes valeurs de λ.

1. Montrer que sans nuire à la généralité, on peut prendre $f(x_0) > 0$.
2. Montrer que F peut se récrire comme :

$$F(\lambda) = e^{\lambda g(x_0)} \int_I f(x) e^{\lambda h(x)} dx,$$

   où l'on exprimera h en fonction de g.
3. Soit $\epsilon > 0$
   (a) Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que $x_0 \pm \eta \in I$ et :

$$f(x_0)(1-\epsilon) \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} e^{-\lambda\alpha|x-x_0|^\mu} dx \leq \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} f(x) e^{\lambda h(x)} dx \leq f(x_0)(1+\epsilon) \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} e^{-\lambda\alpha|x-x_0|^\mu} dx.$$

   (b) En déduire qu'il existe $\lambda_1 > 0$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_1$,

$$f(x_0)(1-\epsilon)^2 \frac{2\Gamma(1/\mu)}{\mu(\lambda\alpha)^{1/\mu}} \leq \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} f(x) e^{\lambda h(x)} dx \leq f(x_0)(1+\epsilon)^2 \frac{2\Gamma(1/\mu)}{\mu(\lambda\alpha)^{1/\mu}}.$$

   Indication : On pourra poser $y = \lambda\alpha|x - x_0|^\mu$.

   (c) Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que

$$\forall x \notin [x_0 - \eta, x_0 + \eta],\ h(x) \leq -m.$$

   En déduire que pour tout $\lambda > 1$:

$$\left| \int_{I \setminus [x_0-\eta, x_0+\eta]} f(x) e^{\lambda h(x)} dx \right| \leq e^{-(\lambda-1)m} \int_I |f(x)| e^{h(x)} dx,$$

   puis qu'il existe λ_2 tel que pour tout $\lambda > \lambda_2$, alors :

$$\left| \int_{I \setminus [x_0-\eta, x_0+\eta]} f(x) e^{\lambda h(x)} dx \right| < \epsilon f(x_0) \frac{2\Gamma(1/\mu)}{\mu(\lambda\alpha)^{1/\mu}}.$$

4. Déduire des questions précédentes que pour $\lambda \to \infty$:

$$F(\lambda) \sim \frac{2\Gamma(1/\mu)}{\mu(\lambda\alpha)^{1/\mu}} f(x_0) e^{\lambda g(x_0)}.$$

5. Montrer que le cas où g est de classe $\mathcal{C}^2$, $\mu = 2$ et $\alpha = -g''(x_0)/2$. Que devient alors la relation précédente ?
6. Étendre le résultat précédent au cas où f est à valeurs dans $\mathbb{C}$.
7. Expliquer brièvement comment adapter la méthode de Laplace au cas où x_0 coïncide avec une des bornes de I.

8. *Application 1* : formule de Stirling. On cherche ici à calculer un équivalent de $n!$ aux grandes valeurs de n. Ceci est d'un grand intérêt pratique en physique statistique où l'on est amené à faire du dénombrement sur un grand nombres de particules.

   (a) Montrer que pour tout $\lambda \in]0, +\infty[$, $\Gamma(\lambda + 1) = \lambda\Gamma(\lambda)$.

   (b) Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire que pour n entier, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

   (c) En faisant le changement de variable $t' = t/\lambda$ dans (1), se ramener aux conditions d'application de la méthode de Laplace pour $\mu = 2$ et en déduire la formule de Stirling :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$$

9. *Application 2 :* intégrale de Fresnel. Soit

$$H(R) = \int_0^R e^{-ix^2}\, dx$$

   dont on cherche à étudier la convergence lorsque $R \to \infty$.

   (a) En intégrant la fonction $f(z) = \exp(-z^2)$ sur un contour adéquat du plan complexe, montrer que :

$$e^{i\pi/4} H(R) = \int_0^R e^{-x^2} dx + \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \exp 2i\theta} iRe^{i\theta} d\theta.$$

   (b) Montrer que :

$$\left| \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \exp 2i\theta} e^{i\theta} d\theta \right| < \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2\theta} d\theta.$$

   Utiliser la méthode de Laplace et en en déduire que pour $R \to \infty$,

$$\left| \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \exp 2i\theta} e^{i\theta} d\theta \right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

   (c) En faisant le changement de variable $u = x^2$, montrer que

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx^2 = \frac{\Gamma(1/2)}{2}$$

   puis prouver que H converge pour $R \to +\infty$ vers H_∞ donné par :

$$H_\infty = e^{-i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2 Méthode de la phase stationnaire

On s'intéresse à présent au comportement de la fonction $F(\lambda)$ définie par :

$$F(\lambda) = \int_I f(x)e^{i\lambda g(x)}\,dx,$$

où I est un intervalle fermé et borné, f et g sont deux fonctions à valeurs réelles et où l'on fait les hypothèses suivantes :

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
- g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et il existe un unique x_0 dans I tel que $g'(x_0) = 0$. On fait de plus l'hypothèse que $g''(x_0) \neq 0$.

1. Montrer qu'avec les hypothèses ci-dessus, F est bien définie.
2. *Lemme de la phase instationnaire* : soit J un sous intervalle fermé de I ne contenant pas x_0. Montrer que pour λ tendant vers l'infini,

$$\int_J f(x)e^{i\lambda g(x)}\,dx = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

   Indication : on écrira

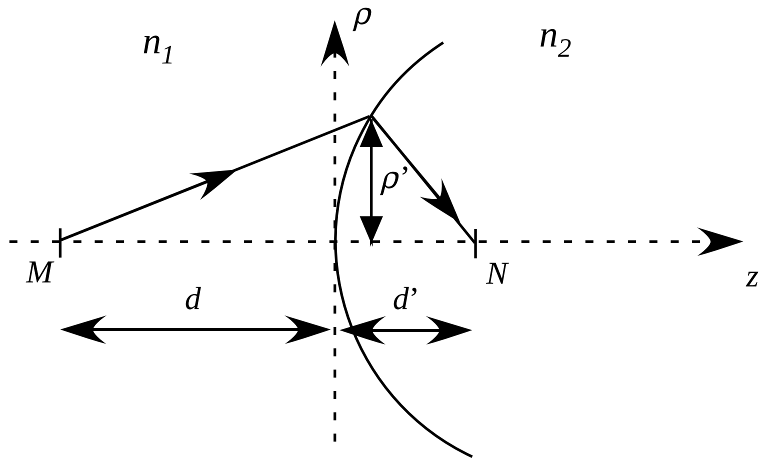
$$\int_J f(x)e^{i\lambda g(x)}\,dx = \int_J \frac{f(x)}{g'(x)}g'(x)e^{i\lambda g(x)}\,dx$$

   puis on intégrera par parties.
3. Adapter la méthode de Laplace en utilisant l'intégrale de Fresnel et le lemme de la phase instationnaire. En déduire que pour $\lambda \to \infty$:

$$F(\lambda) \sim e^{i\pi \mathrm{sg}(g''(x_0))/4}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|g''(x_0)|}}f(x_0)e^{i\lambda g(x_0)},$$

   où $\mathrm{sg}(u)$ désigne le signe de $u \neq 0$.
4. *Application* : relation de conjugaison en optique. On considère un dioptre séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2. Le dioptre est invariant par rotation autour de l'axe z (dit "axe optique") et l'équation de sa surface est donnée en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) par l'équation $z = f(\rho)$, avec $f(0) = f'(0) = 0$. On suppose par ailleurs le dioptre de rayon ρ_0.
   On place une source ponctuelle en un point M de la région 1. On suppose M placé sur l'axe optique à une distance d du sommet du dioptre. On suppose la source monochromatique de longueur d'onde λ.
   (a) Soit un point N de l'axe optique situé dans la région 2 à une distance d' du sommet du dioptre. Montrer à l'aide du principe de Huygens que l'amplitude s du champ électrique en N s'écrit :

$$s(N) = \int_0^{\rho_0} s_0(\rho')\exp\left(\frac{i}{\lambda}L_{M\to N}(\rho')\right)d\rho',$$



où $s_0(\rho')$ et $L_{M\to N}(\rho') = n_1\sqrt{(d+f(\rho'))^2+\rho'^2} + n_2\sqrt{(d'-f(\rho'))^2+\rho'^2}$ désignent respectivement l'amplitude et le chemin optique du rayon allant de M à N en traversant le dioptre en ρ'.

(b) En utilisant le théorème de la phase stationnaire, calculer $s(N)$ dans la limite $\lambda \to 0$ puis commenter. Quelle relation bien connue retrouve-t-on.

Indication : on rappelle que pour une courbe d'équation $y = ax^2$, $R = 1/2a$ est le rayon de courbure en $x = y = 0$.