

TUTORAT 2

FONCTIONS HOLOMORPHES ET HYDRODYNAMIQUE

Frédéric Chevy – chevy@lkb.ens.fr
http://www.phys.ens.fr/~chevy/Tutorat/Tut.html

1 Fonctions holomorphes et écoulements parfaits bidimensionnels

Dans cette partie, on souhaite montrer comment l'utilisation des fonctions analytiques permet de décrire les propriétés des écoulements inviscides bidimensionnels. On considérera un fluide de masse incompressible, de masse volumique ρ dont l'écoulement est irrotationnel et limité au plan (x, y) .

1. Montrer qu'il existe une fonction scalaire φ telle que $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\varphi$. Si l'écoulement est incompressible, montrer que φ est harmonique¹.
2. Soient $U = \partial_y\varphi$ et $V = \partial_x\varphi$. Montrer que U et V satisfont les conditions de Cauchy-Riemann, et en déduire que $f = U + iV$ est une fonction holomorphe sur la surface occupée par le fluide. Relier la circulation du champ de vitesse sur un contour γ à $\oint_\gamma f(z)dz$, avec $z = x + iy$.
3. *Exemples d'écoulement.* Quels types d'écoulement décrivent les fonctions $f(z) = \text{cte}$, $f(z) = \Gamma/z$ et, plus généralement, $f(z) = z^\alpha$?
4. Théorème de Blasius. On suppose qu'un obstacle est placé dans le fluide et on note \mathcal{C} sa frontière avec le liquide.
 - (a) Rappeler le théorème de Bernoulli pour un écoulement incompressible et irrotationnel. En déduire que la force $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ exercée par le fluide sur l'objet satisfait

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_{\mathcal{C}} f(z)\bar{f}(z)d\bar{z},$$

où f désigne la fonction analytique décrivant l'écoulement.

- (b) En utilisant la condition de non pénétrabilité de l'obstacle, montrer que $f(z)dz$ est réel. En déduire que

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_{\mathcal{C}} f(z)^2 dz.$$

Pourquoi cette expression est-elle indépendante du contour choisi dans le domaine occupé par le fluide ?

¹*i.e.* son laplacien est nul

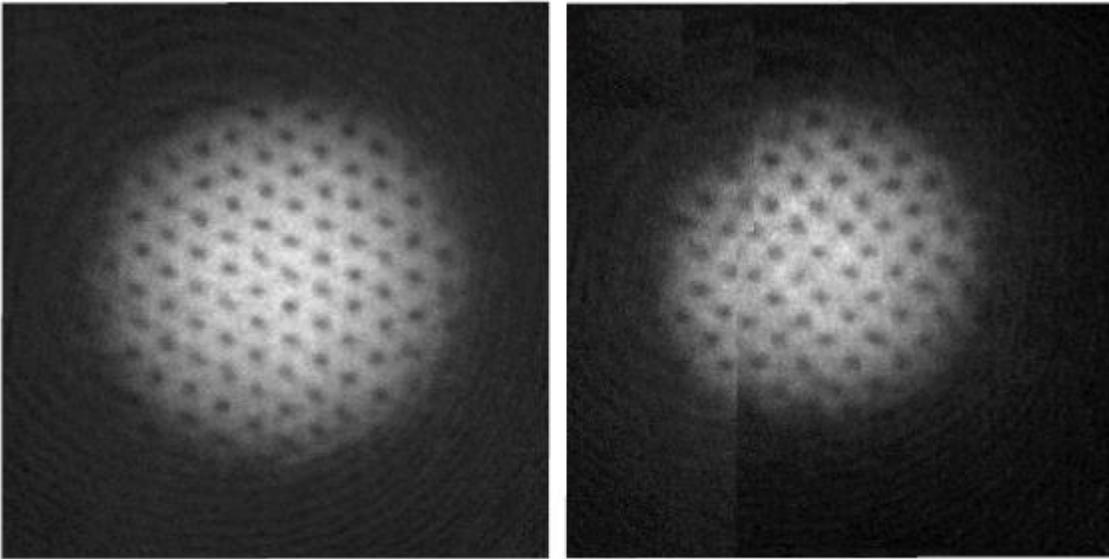


FIG. 1 – Réseau triangulaire (gauche) et carré (droite) de vortex obtenu à JILA (Colorado) après mise en rotation d’un condensat de Bose-Einstein (Figure extraite de *Observation of Vortex Pinning in Bose-Einstein Condensates*, S. Tung, V. Schweikhard, et E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **97**, 240402 (2006)).

- (c) On considère le cas d’un écoulement de vitesse $V_\infty \mathbf{u}_x$ à longue distance de l’obstacle. Pourquoi le développement de Laurent de f peut-il se mettre sous la forme

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

Exprimer a_0 et a_1 en fonction de la vitesse asymptotique et de la circulation du champ de vitesse.

- (d) En intégrant sur un cercle de rayon $R \rightarrow \infty$, en déduire l’expression de la force en fonction de la vitesse V_∞ et de la circulation du fluide autour de l’obstacle. Que dire de la direction de cette force ?

2 Application aux écoulements superfluides

Les superfluides tels que l’hélium liquide à très basse température se comportent comme des fluides parfaits. Une des caractéristiques de ces superfluides est l’apparition de réseaux réguliers de tourbillons, appelés réseaux d’Abrikosov, lorsque l’on met en rotation le fluide (Fig. 1).

On suppose que les vortex sont tous identiques et sont répartis régulièrement selon Ω et on admet que le champ de vitesse associé au réseau peut se mettre sous la forme

$$f(z) = \Gamma \zeta(z),$$

où ζ est la fonction de Weierstrass.

1. Rappeler la structure de cette fonction et justifier qualitativement la forme du champ de vitesse.

2. En utilisant la propriété de quasi-périodicité de la fonction ζ de Weierstrass, montrer qu'au voisinage du vortex localisé en $\omega = t_1\omega_1 + t_2\omega_2$ le champ de vitesse peut se mettre sous la forme

$$f(z) = \frac{\Gamma}{z - \omega} + \varphi_\omega + o(1),$$

où φ_ω est appelé vitesse de dérive du vortex.

3. Montrer que $\varphi_\omega = \alpha\omega + \beta\omega^*$, où α et β sont deux nombres complexes que l'on exprimera en fonction des ω_i et des η_i .
4. On admet (théorème de Kelvin-Helmholtz) que les vortex se déplacent à la vitesse de dérive. Montrer que pour que le réseau de vortex soit stationnaire dans un référentiel en rotation à la vitesse Ω , il faut avoir $\alpha = 0$ et $\beta = \Omega$. En déduire l'expression de la densité surfacique de vortex en fonction de Γ et Ω .

La condensation de Bose-Einstein en phase gazeuse

Depuis quelques années, on dispose en laboratoire de gaz ultra-froids dont les propriétés sont très éloignées de l'intuition habituelle. La majeure partie des atomes de ces gaz occupe un seul état quantique, confirmant ainsi une prédiction faite par Einstein il y a 75 ans. La découverte de ces condensats atomiques a permis de valider les théories développées il y a plusieurs dizaines d'années pour décrire le comportement superfluide de l'hélium liquide. Elle ouvre également la voie à la réalisation de sources atomiques cohérentes, qui sont l'équivalent, pour des ondes de matière, des sources maser et laser pour les ondes électromagnétiques.

LA PRÉDICTION D'EINSTEIN

En 1924, Albert Einstein reçut un projet d'article écrit par un jeune physicien bengali, Satyendra Nath Bose, qui démontrait la loi de Planck pour le rayonnement du corps noir en traitant les photons comme un gaz de particules identiques. Fort intéressé, Einstein traduisit le manuscrit en allemand et veilla à sa publication, puis généralisa cette idée à un gaz de particules matérielles. Dans un second article, publié en 1925, Einstein démontra une propriété extraordinaire de ce système de particules matérielles : si sa densité spatiale n est plus grande que la valeur critique donnée par :

$$n_c \simeq \frac{0,166}{\hbar^3} (mk_B T)^{3/2} \quad (1)$$

où k_B et \hbar sont les constantes de Boltzmann et de Planck, et m la masse des particules, alors une fraction macroscopique des atomes se « condense » dans l'état d'énergie le plus bas, c'est-à-dire l'état d'impulsion nulle pour une enceinte de confinement arbitrairement grande. Une formulation équivalente revient à comparer la distance moyenne entre particules, $d = n^{-1/3}$, à la lon-

gueur d'onde de de Broglie thermique $\lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2 / mk_B T}$: quand d est grand devant λ , le comportement du gaz est voisin de celui prédit par la théorie classique des gaz. En revanche, quand le rapport λ/d croît et devient de l'ordre de l'unité, le phénomène de condensation se produit. Ainsi, quand $\lambda = 2d$, Einstein prédit que les deux tiers des particules du gaz devaient occuper l'état quantique fondamental.

« C'est une belle théorie, mais contient-elle une vérité ? ». C'est par ces mots qu'Einstein lui-même décrira son résultat dans une lettre à Paul Ehrenfest, avant de se détourner définitivement du phénomène de condensation. Cette défiance demeura générale pendant les années qui suivirent. Il fallut attendre 1937, avec la découverte de la superfluidité de l'hélium liquide, pour que la prédiction d'Einstein soit reconsidérée avec intérêt. London remarqua que la température de la transition superfluide, $T_\lambda = 2,2$ K, est étonnamment proche de la température de la condensation de Bose-Einstein d'un gaz parfait de même densité que l'hélium liquide, $T_c = 3,2$ K, et il eut l'intuition que les deux phénomènes devaient être liés.

Cette remarque de London est à la base des modèles théoriques

modernes de l'hélium liquide : l'hélium est un ensemble de particules de spin entier (en l'occurrence 0) et il est légitime de lui appliquer les principes de la statistique découverte par Bose et Einstein. Néanmoins, on sait aussi que le rapport entre condensation de Bose-Einstein et superfluidité n'est pas immédiat. La superfluidité trouve son origine dans l'interaction entre particules, alors que le modèle d'Einstein – ce n'est pas son aspect le moins surprenant – traite d'un gaz parfait. Plus quantitativement, les expériences de diffusion de neutrons révèlent que le condensat dans l'hélium liquide ne contient pas plus de 10 % des atomes, même à température nulle, alors qu'il devrait pouvoir accueillir la totalité des atomes pour un gaz parfait. L'hélium liquide est cependant resté depuis les travaux de London l'exemple-type de condensat de Bose-Einstein, que l'on retrouve dans tous les manuels de physique statistique.

LES CONDENSATS GAZEUX

La recherche de systèmes plus proches du modèle initial d'Einstein est devenue très active au cours des 20 dernières années. Le développement des techniques de piégeage et de refroidissement d'atomes par des

– Laboratoire Kastler-Brossel, UMR 8552 CNRS, Université Paris 6, ENS, 24, rue Lhomond, 75231 Paris cedex 05.



faisceaux lumineux ou des champs magnétiques statiques a permis de faire sauter les verrous qui avaient auparavant bloqué cette recherche. En 1995, à Boulder, la découverte par le groupe de E. Cornell et C. Wieman d'un condensat de rubidium, suivie de peu par son analogue pour le lithium, le sodium et l'hydrogène, est venue couronner ces efforts.

Quels sont les outils nécessaires pour un tel succès ? On souhaite se rapprocher de l'hypothèse de base d'Einstein, c'est-à-dire travailler avec un gaz très dilué et pas un liquide, comme c'est le cas pour l'hélium. Le prix à payer se lit immédiatement sur l'équation (1) : quand on diminue la densité spatiale du système en jeu, la température de transition s'abaisse également. Ces nouveaux condensats atomiques se forment pour une densité voisine de 10^{19} atomes/m³ (au lieu de 10^{27} atomes/m³ pour l'hélium liquide) et la température de condensation est dans le domaine du microkelvin, ou en deçà.

Cette contrainte en température vient imposer un point commun à toutes ces expériences : le confinement du gaz atomique ne peut pas se faire par des parois matérielles, car la totalité des atomes se collerait immédiatement aux parois pour ne plus en bouger. Le gaz est piégé grâce à un champ magnétique inhomogène, qui le maintient en lévitation au centre d'une enceinte où règne un vide très poussé (10^{-9} Pa). Chaque atome porte un moment magnétique $\vec{\mu}$, qui se couple au champ magnétique local pour donner naissance à l'énergie d'interaction $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Cette énergie joue le rôle d'une énergie potentielle pour le mouvement du centre de masse de l'atome, et la force magnétique qui en résulte permet de confiner l'atome.

Considérons par exemple un atome au voisinage d'un point O où l'amplitude $|\vec{B}(\vec{r})|$ du champ magnétique est minimale (figure 1).

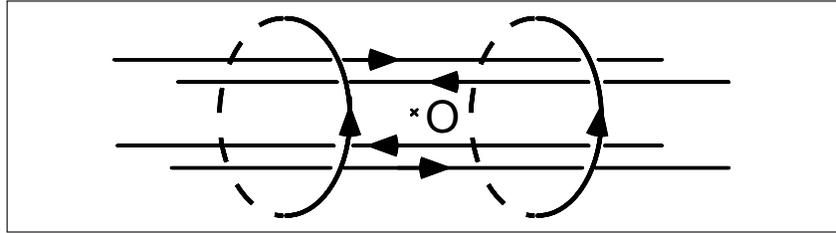


Figure 1 - Un exemple de piège magnétique couramment utilisé (piège de Ioffe-Pritchard). Ce piège est constitué par quatre fils parallèles, parcourus par des courants deux à deux opposés, qui assurent le confinement transverse des atomes. Le confinement longitudinal provient des deux bobines circulaires, parcourues par un même courant. La distance entre ces deux bobines doit être supérieure à leur rayon, pour que le module du champ magnétique présente un minimum en O . Expérimentalement, le champ magnétique en O est de l'ordre de 10^{-4} teslas.

Si le moment magnétique de l'atome a une direction opposée à celle du champ magnétique local, l'énergie magnétique s'écrit

$$E(\vec{r}) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = |\vec{\mu}| |\vec{B}(\vec{r})|.$$

Cette énergie potentielle est elle-même minimale en O , et l'atome va effectuer des oscillations stables autour de ce point. Dans les conditions usuelles de fonctionnement des pièges magnétiques, ces oscillations se font à une fréquence de l'ordre de la centaine de hertz, et l'approximation qui consiste à supposer que $\vec{\mu}$ et \vec{B} restent en permanence anti-parallèles est très bien vérifiée.

On pourrait également songer à travailler au voisinage d'un point où l'amplitude du champ magnétique est maximale, et piéger les atomes dont le moment magnétique est parallèle au champ. Mais les équations de la magnétostatique interdisent l'existence d'un tel maximum, à moins de se placer à l'intérieur d'un aimant ou à la surface d'un fil parcouru par un courant. Une telle solution étant incompatible avec la stabilité du condensat gazeux recherché, on se limite aux pièges centrés sur un minimum de champ magnétique.

Comment mettre des atomes dans un piège magnétique ? On prépare un nuage atomique le plus froid possible au voisinage de O , et on branche rapidement le courant dans les bobines créant le champ magnétique piégeant. Les moments magnétiques des atomes sont simultanément

orientés dans la direction opposée à celle du champ grâce à un faisceau lumineux. Ce faisceau assure le *pompage optique* du gaz, selon une technique mise au point par Alfred Kastler et Jean Brossel entre 1950 et 1960. Les atomes dont l'énergie cinétique est inférieure à la profondeur du puits sont capturés. On peut ainsi garder pendant plusieurs minutes une assemblée d'atomes, la seule limitation étant le gaz résiduel de l'enceinte à vide dans laquelle se déroule l'expérience : si une molécule du gaz résiduel tape dans un atome piégé, celui-ci recule et s'échappe du piège.

La présence du piège ne change pas de manière significative le critère de condensation donné par l'équation (1), pourvu que n_c désigne la densité au centre du piège, et que le nombre d'atomes présents dans le piège au seuil de condensation soit grand. En pratique ce nombre est de l'ordre du million, et la prédiction d'Einstein peut donc s'appliquer sans problème.

Le refroidissement initial du nuage atomique se fait en général grâce à des lasers auxiliaires, ce qui permet d'atteindre des températures inférieures à la centaine de microkelvins. Le principe du refroidissement lumineux a été présenté dans *Images de la Physique 1990*. Il consiste à tirer parti des échanges d'impulsion entre lumière et atomes pour diminuer l'agitation thermique du gaz. Il permet de se rapprocher

notablement de la condition de condensation de Bose-Einstein, faisant passer le rapport λ/d de 10^{-6} (pour la vapeur atomique initiale) à 10^{-2} (pour un « piège magnéto-optique »). Jusqu'à maintenant, il n'a pas été possible d'atteindre le seuil de condensation $\lambda/d \sim 1$ en utilisant uniquement le refroidissement laser. En effet, à basse température et à haute densité, un effet néfaste de la lumière se manifeste : elle favorise la formation de molécules à partir des atomes que l'on cherche à condenser, ce qui crée des pertes trop importantes pour atteindre le seuil de condensation (voir *Les molécules froides* dans *Images de la Physique 1999*).

LE REFROIDISSEMENT ÉVAPORATIF

Une fois le piège magnétique branché, il s'agit d'amener le gaz vers la condensation, sans utiliser de moyens autres que ceux directement liés au piège lui-même. Une première idée pourrait être d'accroître le courant dans les bobines créant le champ, ce qui crée un potentiel confinant plus raide, et donc une densité centrale plus élevée. Malheureusement, dans cette opération, la température augmente aussi et le rapport λ/d ne change pas. Le succès des expériences récentes est venu d'une technique très ancienne, et connue de tous les enfants ayant dû avaler une assiette de soupe trop chaude : pour la refroidir, on souffle dessus. Ce refroidissement n'est pas dû à la différence de température entre le liquide et le gaz soufflé, mais à l'évaporation de la soupe qui est favorisée par la ventilation provoquée par l'enfant. Arracher une molécule du liquide coûte de l'énergie, qui est prélevée sur le liquide restant. On procède de la même façon pour les atomes piégés, en tronquant la profondeur du potentiel confinant les atomes à une hauteur légèrement supérieure à l'énergie cinétique moyenne des atomes piégés. Ainsi les atomes les plus rapides

s'échappent du piège, et les atomes restants se rethermalisent à une température inférieure à la température initiale. On peut montrer que la densité au centre du piège est augmentée lors de cette évaporation. Par conséquent, en la poursuivant assez longtemps, on doit réussir à atteindre le seuil de condensation.

Contrairement à la cuillère de soupe, dont le volume n'est que très faiblement diminué par l'évaporation, il faut sacrifier beaucoup d'atomes pour atteindre notre but. Puisque le rapport λ/d ne vaut que 10^{-2} à l'issue du chargement du piège, on doit gagner plusieurs ordres de grandeur sur la température et sur la densité spatiale du gaz. Cette évaporation se pratique en maintenant constant le taux de collision élastique entre atomes. Ainsi le processus de rethermalisation des particules restant dans le piège se produit de manière efficace. Le taux de collision est proportionnel à la densité spatiale et à la vitesse thermique des atomes, soit $1/(\lambda d^3)$. Un calcul simple prouve alors qu'il faut augmenter λ d'un facteur 30 et diminuer d d'un facteur 3 pour gagner les deux ordres de grandeur nécessaires sur le rapport λ/d . Comme le potentiel de piégeage est harmonique, on peut montrer que le nombre d'atomes présents est proportionnel à $(\lambda d)^{-3}$. Ce nombre doit donc être divisé par 1000 lors de l'évaporation ! En pratique, on part d'environ un milliard d'atomes dans le piège magnétique, pour finir avec un million seulement. C'est à ce prix qu'un condensat de Bose-Einstein peut se former au centre du piège.

Pour modifier à volonté la hauteur du puits de potentiel magnétique confinant les atomes, on utilise une onde radio de pulsation ω ajustable. Cette onde fait basculer les moments magnétiques résonnants avec elle, c'est-à-dire ceux situés sur une surface de champ magnétique donné, tel que $\mu B = \hbar \omega$, où μ est le moment magnétique d'un atome. La valeur initiale de ω est grande : ceci correspond à une profondeur élevée

pour le puits de potentiel, et permet de confiner même des atomes d'énergie importante (millikelvin). Le refroidissement évaporatif forcé se fait en maintenant constant le courant créant le piège magnétique, et en diminuant progressivement ω . La valeur finale de la fréquence radio correspond à un champ magnétique B voisin de la valeur minimale pour le piège magnétique considéré. La profondeur du puits de potentiel en fin d'évaporation est très faible, de l'ordre de quelques microkelvins seulement.

COMMENT VOIR UN CONDENSAT ?

L'observation de ces condensats gazeux se fait en les éclairant par une brève impulsion lumineuse, dont on mesure ensuite l'absorption ou le déphasage par l'assemblée atomique. On a ainsi accès à la distribution spatiale des atomes dans le potentiel magnétique. On peut également couper le piège magnétique et laisser l'assemblée atomique s'étaler pendant une durée de quelques dizaines de millisecondes, avant d'envoyer l'éclair lumineux. De l'étendue du nuage atomique après étalement, on déduit la distribution en vitesse initiale.

La figure 2 illustre ce principe. Les figures 2a et 2b sont des photos *in situ*, qui montrent la répartition des atomes au sein du piège magnétique. La distribution des atomes a une forme de cigare, qui résulte de la forte anisotropie du piège. La présence éventuelle d'un condensat est révélée de manière non ambiguë par les clichés donnant les distributions en vitesse (2c, d). Pour la photo 2c, prise pour une densité inférieure à la densité critique, on obtient une distribution en vitesse quasi isotrope, comme attendu à partir de l'équipartition d'énergie pour un gaz bien décrit par la physique statistique classique. Au contraire, le cliché 2d, pris pour une densité centrale plus élevée que la densité critique, montre une distribution en vitesse



Physique statistique

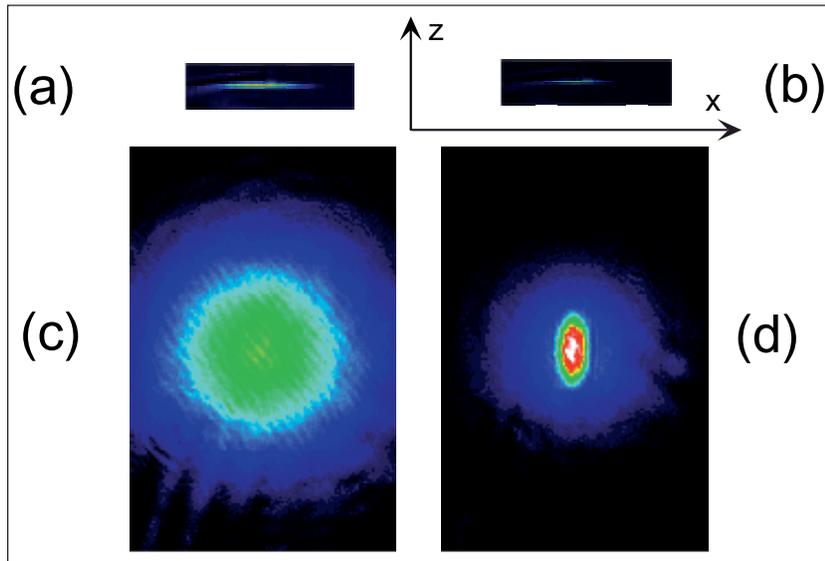


Figure 2 - Photographies d'un ensemble d'atomes de rubidium après évaporation, obtenues en mesurant l'absorption d'un faisceau lumineux par le gaz atomique. Les photos (a) et (b) sont des images in situ des atomes dans le piège magnétique. Le piège est fortement anisotrope, avec une fréquence d'oscillation selon x de 11 Hz, et une fréquence d'oscillation selon y et z de 150 Hz. L'anisotropie du nuage reflète cette anisotropie du confinement. Ces photos correspondent respectivement à un gaz non condensé (a) et condensé (b), mais il est difficile de le prouver sans ambiguïté, car la taille transversale de ce nuage est de quelques microns seulement, ce qui correspond à la limite de résolution du système d'imagerie optique. Pour faire des mesures quantitatives, on utilise plutôt des images prises d'expansion balistique du nuage atomique (c et d). Ces photos, qui correspondent à la même séquence d'évaporation que les photos (a) et (b) respectivement, sont prises 30 ms après la coupure du piège. Elles donnent accès à la distribution en vitesse des atomes juste après coupure. Sur la photo (c), la distribution est quasi isotrope, ce qui prouve que le gaz piégé était bien décrit par la loi classique d'équipartition de l'énergie, $mv_i^2 = k_B T$, pour les trois axes $i = x, y, z$, avec ici $T = 500$ nK. La photo (d), également prise 30 ms après la coupure du piège, a été obtenue après qu'on a poussé le refroidissement évaporatif au-delà du seuil de condensation. La structure elliptique centrale, de longueur totale $270 \mu\text{m}$ et de largeur $130 \mu\text{m}$, représente les atomes condensés. L'ellipticité de la distribution en vitesse, inversée par rapport à celle des positions dans le piège, est une conséquence directe des relations d'incertitude de Heisenberg. Le halo quasi circulaire extérieur correspond aux atomes non condensés, et il donne accès à la température du système (200 nK). (Photos de P. Desbiolles, D. Guéry-Odelin et J. Söding, ENS).

fortement anisotrope, la direction la plus fortement confinée dans le piège magnétique étant celle ayant la plus grande dispersion en vitesse. Cette conséquence directe de la relation d'incertitude de Heisenberg révèle que les atomes se sont accumulés dans ce cas dans l'état fondamental du piège magnétique : ils ont tous la même fonction d'onde, dont la dispersion horizontale est plus grande que la dispersion verticale du fait de l'asymétrie du piège. En retour, la dispersion verticale des vitesses est plus grande que la dispersion horizontale.

Ce type d'images permet d'obtenir des informations quantitatives sur les condensats, comme le nombre d'atomes et la température résiduelle associée à la fraction d'atomes non condensés. On a ainsi vérifié avec une très bonne précision (quelques %) que la température de la transition était effectivement donnée par (1). On a également pu produire des condensats pratiquement purs, dans lesquels la fraction non condensée ne dépasse pas 15 % du nombre total d'atomes (en dessous de cette valeur, elle devient très difficile à mesurer).

LA DYNAMIQUE DES CONDENSATS

La possibilité d'observer des condensats de Bose-Einstein gazeux a permis une confrontation très précise des modèles théoriques avec les mesures expérimentales. Ces modèles, développés initialement pour rendre compte de la superfluidité de l'hélium liquide, n'avaient pas pu être testés quantitativement en raison de la complexité des processus prenant place au sein du liquide.

Comment décrire théoriquement un condensat gazeux ? Remarquons pour commencer que, contrairement au cas du gaz avant condensation, qui est très dilué et donc proche d'un gaz parfait, la description théorique d'un condensat de Bose-Einstein nécessite une prise en compte correcte des interactions entre les atomes : l'accumulation du condensat au fond du puits de potentiel magnétique conduit à une densité spatiale de l'ordre de 10^{20} atomes/ m^3 , pour laquelle le modèle du gaz parfait n'est plus valable. Fort heureusement, ces interactions entre atomes condensés sont très bien décrites par une simple théorie de champ moyen. C'est pourquoi on peut supposer que tous les atomes sont dans le même état quantique, décrit par une fonction d'onde unique. Cette « fonction d'onde du condensat » est solution d'une équation de Schrödinger qui fait intervenir l'énergie cinétique des atomes, le potentiel magnétique de confinement, et un terme non linéaire décrivant l'effet du condensat sur lui-même (voir encadré).

Le terme de champ moyen peut être répulsif ou attractif, selon l'espèce atomique considérée, et ce point joue un rôle essentiel pour le comportement du condensat. Pour l'hydrogène, le sodium ou le rubidium 87, le champ moyen correspond à une interaction répulsive. On peut alors mettre un nombre arbitrairement élevé d'atomes dans le

Encadré

INTERACTIONS DANS UN CONDENSAT ET ÉQUATION DE SCHRÖDINGER NON LINÉAIRE

Pour les densités spatiales relativement élevées des condensats de Bose-Einstein, on ne peut pas ignorer les interactions entre atomes. Ces interactions jouent un rôle essentiel pour déterminer les propriétés statiques du condensat – taille, énergie –, ainsi que les propriétés dynamiques – modes de vibration, superfluidité. Leur prise en compte semble a priori un problème ardu, car le potentiel d'interaction entre deux atomes $v(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ est compliqué : attractif à longue distance ($|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| > 0,5 \text{ nm}$), il devient répulsif quand les deux atomes sont suffisamment proches pour que leurs nuages électroniques se recouvrent. Fort heureusement, à très basse température, il n'est pas nécessaire de prendre en compte la forme précise de ce potentiel pour décrire les propriétés du gaz atomique. La relation d'incertitude de Heisenberg – encore elle – nous dit qu'un atome est d'autant plus délocalisé que sa vitesse est bien connue. L'ordre de grandeur de cette délocalisation quantique est donné par la longueur d'onde thermique λ ; quand celle-ci devient supérieure à la portée du potentiel, on peut ignorer les détails de $v(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ et le caractériser par une seule quantité, appelée longueur de diffusion et notée a . En particulier, deux potentiels ayant même longueur de diffusion ont des effets physiques équivalents à très basse température. On peut ainsi remplacer le potentiel réel $v(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ par le potentiel beaucoup plus simple :

$$v_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad , \quad (2)$$

où $\delta(\mathbf{r})$ représente la distribution de Dirac.

La longueur de diffusion peut être positive ($a = 0,065 \text{ nm}$ pour l'hydrogène, $5,4 \text{ nm}$ pour le rubidium) ou négative ($-1,5 \text{ nm}$ pour le lithium). Dans le premier cas, on dit qu'on a affaire à une interaction effective répulsive, car cela coûte de l'énergie de mettre deux atomes au même endroit, dans ce domaine de très basse température. Dans le cas contraire l'interaction est dite attractive. Il est difficile de calculer ab initio la valeur de a , surtout pour les éléments lourds comme le rubidium, car cela nécessite une connaissance très précise du potentiel inter-atomique réel. On s'en remet donc en pratique à une mesure expérimentale. Par ailleurs, on peut tirer parti de la très grande sensibilité de la valeur de a au potentiel d'interaction réel. En modifiant légèrement ce potentiel par des champs extérieurs (un champ magnétique d'un ou deux ordres de grandeur plus grand que celui du piège magnétique fait l'affaire) on peut varier a , et même changer son signe. On dispose alors d'un bouton de réglage qui transforme un gaz répulsif en gaz attractif, en passant par un gaz quasi idéal.

Revenons maintenant aux N atomes confinés dans un piège harmonique de fréquence $\omega/(2\pi)$. On remplace dans l'hamiltonien du système le potentiel réel par le potentiel de contact (2) :

$$H = \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i + \frac{1}{2} m \omega^2 r_i^2 \right\} + \sum_{i,j (i < j)} v_0(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (3)$$

Par ailleurs, en supposant que le système est à très basse température et donc presque totalement condensé, on peut chercher la fonction d'onde à N atomes $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ sous une forme très simple, où chaque atome occupe le même état ϕ :

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \phi(\mathbf{r}_1) \phi(\mathbf{r}_2) \dots \phi(\mathbf{r}_N)$$

L'évolution de $\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ est donnée par l'équation de Schrödinger correspondant à l'hamiltonien (3), ce qui détermine l'évolution temporelle de $\phi(\mathbf{r}, t)$:

$$i\hbar \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \phi(\mathbf{r}, t) + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} (N-1) |\phi(\mathbf{r}, t)|^2 \phi(\mathbf{r}, t)$$

Cette équation de Gross-Pitaevskii, qui a la structure d'une équation de Schrödinger avec un terme non linéaire additionnel, est voisine de l'équation de Ginzburg-Landau utilisée en théorie de la supra-conductivité pour décrire la dynamique des paires de Cooper. Ces équations permettent de transposer à un système macroscopique (1 million d'atomes pour les condensats gazeux) des concepts quantiques développés initialement pour des particules individuelles : étalement du paquet d'ondes, interférences entre chemins quantiques, niveaux d'énergie. Cette ouverture de la physique quantique vers le monde macroscopique offre également un éclairage nouveau sur les fondements de cette théorie. Ainsi les photographies des figures 2, 3 et 4 constituent une mesure quasi instantanée de la distribution spatiale $|\phi(\mathbf{r}, t)|^2$ associée à la fonction $\phi(\mathbf{r}, t)$, alors que cette détermination dans le cadre de la physique à une particule requiert en principe un grand nombre de mesures successives, menées sur des systèmes tous préparés dans le même état initial.

condensat, sa taille d'équilibre augmentant avec sa population. Au contraire, un champ moyen attractif, comme c'est le cas pour le lithium 7,

limite le nombre d'atomes condensables. Au-delà d'une certaine valeur, de l'ordre du millier d'atomes, le condensat s'effondre sur lui-

même. Des molécules et des agrégats sont formés lors de cet effondrement, et ils s'échappent du piège magnétique.

Une fois le condensat produit, on peut le faire vibrer en modulant légèrement le potentiel magnétique qui le confine. On a ainsi accès à ses fréquences de résonance, que l'on peut comparer au spectre prévu par la résolution de l'équation de Schrödinger non linéaire. L'accord entre la prédiction théorique et les observations est excellent, ce qui valide cette description du condensat en terme d'une fonction d'onde identique pour tous les atomes. Notons qu'il est plus délicat de rendre compte des vibrations du condensat et de leur amortissement quand ce dernier est préparé en présence d'une fraction non condensée importante : des problèmes encore ouverts subsistent pour rendre compte des mesures faites à une température proche de la température critique.

COHÉRENCE ET SUPERFLUIDITÉ

L'accumulation de la majorité des atomes dans le même état quantique confère aux condensats de Bose-Einstein des propriétés de cohérence spectaculaires. Le seul équivalent connu est la lumière laser, constituée d'un grand nombre de photons dans le même mode du champ électromagnétique. Cette cohérence a d'ores et déjà permis d'aborder des questions fondamentales comme celle posée par P. W. Anderson il y a une vingtaine d'années : est-ce que deux superfluides qui ne se sont jamais vus ont une phase relative bien définie ?

La réponse à cette question, initialement fort débattue sur le plan théorique, a été apportée par une expérience d'interférence entre condensats menée au MIT. En éclairant le centre du piège magnétique par une nappe de lumière (figure 3a), on peut réaliser un double puits de potentiel. La nappe lumineuse joue le rôle d'une barrière répulsive, qui empêche en pratique tout passage d'atomes condensés entre la partie gauche et la partie droite. On prépare par évaporation un condensat dans

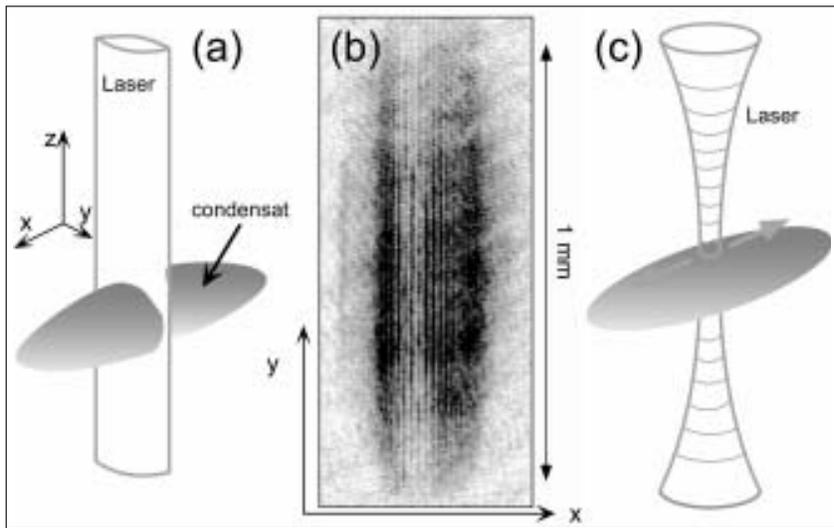


Figure 3 - (a) On réalise un double puits de potentiel en disposant au centre du piège magnétique un faisceau lumineux, de fréquence supérieure à la fréquence de résonance atomique. Ce faisceau crée une barrière de potentiel, qui permet d'obtenir après évaporation deux condensats indépendants. (b) Lorsqu'on coupe le piège magnétique et la barrière lumineuse, chaque condensat s'étale (figure 2d). Dans la zone de recouvrement entre les deux condensats, on observe une figure d'interférence d'ondes de matière. Le contraste élevé des franges d'interférences est une conséquence directe de l'accumulation des atomes de chaque condensat dans un même état quantique. (c) Modification du montage expérimental, permettant d'observer la superfluidité du condensat, ainsi que la vitesse critique au-dessus de laquelle cette superfluidité disparaît. Ces expériences ont été menées au MIT, dans le groupe de W. Ketterle.

chacune de ces deux régions, puis on coupe le potentiel magnétique, ainsi que la barrière lumineuse. Les deux condensats s'étalent, se recouvrent, et on prend une photo de la distribution spatiale des atomes (figure 3b). Cette distribution présente des franges d'interférence avec un fort contraste (70 %), ce qui prouve la cohérence relative des sources atomiques constituées par chacun des deux condensats.

Pour rendre compte de manière quantitative de la figure d'interférence, on décrit chacun des deux condensats par un champ d'onde de matière classique, comme on le fait en optique pour un faisceau lumineux monochromatique. L'évolution de ces deux ondes de matière lors de l'étalement qui suit la coupure du piège est donnée par l'équation de Schrödinger, qui remplace ici les équations de Maxwell décrivant la propagation des faisceaux lumineux. La répartition spatiale des atomes à l'instant de la photo 3b s'obtient en additionnant les ampli-

tudes des deux ondes, ce qui permet d'expliquer la figure d'interférence obtenue. Notons toutefois qu'on ne peut pas prévoir *a priori* la position de la frange brillante centrale. Celle-ci dépend de la phase relative initiale entre les deux condensats, qui fluctue d'une réalisation de l'expérience à une autre : si l'on refait plusieurs fois cette expérience, on obtiendra pour chaque réalisation un profil d'interférence semblable à celui de la figure 3b, mais son système de franges sera décalé aléatoirement ; la moyenne de toutes ces figures d'interférence conduira ainsi à une distribution atomique uniforme.

A partir d'un montage expérimental similaire, l'équipe du MIT a récemment prouvé le caractère superfluide d'un condensat. La superfluidité d'un milieu se définit par le fait qu'un objet de vitesse suffisamment faible s'y déplace sans être freiné, ni réchauffer le milieu. Dans l'expérience du MIT, l'objet n'est autre que le faisceau laser. On le

déplace d'une extrémité du piège vers l'autre à une vitesse ajustable, le rayon focal du faisceau étant cette fois plus petit que la taille transversale du condensat. On constate alors que, pour une vitesse de l'obstacle laser inférieure à $0,3 v_s$, où $v_s = 6 \text{ mm/s}$ est la vitesse du son dans le condensat, la température du nuage atomique n'augmente pas. Ceci prouve la superfluidité du condensat, et donne la vitesse critique au-dessus de laquelle ce phénomène disparaît. Les théoriciens du domaine sont encore au travail pour expliquer ce rapport 0,3 entre vitesse critique et vitesse du son...

PERSPECTIVES

Une trentaine de groupes dans le monde disposent désormais de condensats de Bose-Einstein (dont deux en France, à l'ENS et à l'Institut d'optique à Orsay) et les recherches sur ces systèmes se sont fortement diversifiées au cours des dernières années. Une voie d'étude porte sur l'étude du condensat *per se*. Un sujet fort débattu à la fois sur le plan théorique et expérimental porte sur l'existence au sein de ces gaz de courants permanents, qui sont une conséquence directe de leur superfluidité. Très récemment, des tourbillons quantiques dans un condensat de rubidium ont été mis en évidence au laboratoire Kastler-Brossel de l'ENS (figure 4). Le gaz est mis en rotation avec un faisceau laser, qui joue un rôle analogue à celui de la cuillère qu'on utilise pour mélanger le sucre dans une tasse de café. Au-dessus d'une fréquence critique de rotation, un ou plusieurs tourbillons apparaissent, puis persistent même si l'on débranche la cuillère laser. Des études sont actuellement en cours pour étudier la nucléation de ces tourbillons, et mesurer le champ de vitesse atomique correspondant.

Ces systèmes permettent également de réaliser un « rêve de théoricien » des années 60, qui consiste à superposer des condensats de natu-

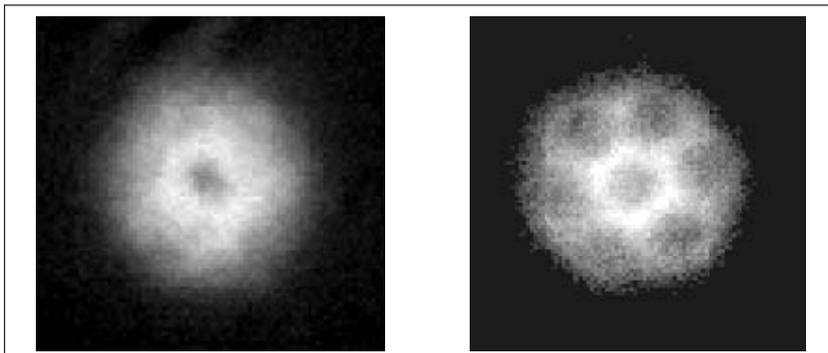


Figure 4 - En « remuant » le gaz atomique avec un faisceau laser se propageant le long du grand axe du cigare de la figure 2ab, on peut faire apparaître des tourbillons quantifiés (ou vortex) dans le condensat. L'axe d'un tourbillon est lui aussi parallèle au grand axe du cigare, et on peut l'observer en photographiant le nuage atomique selon cet axe, après expansion balistique. Le cœur du tourbillon apparaît comme une zone sombre car la densité atomique est fortement réduite sur cette ligne. Le premier tourbillon (photo de gauche) est observé quand la vitesse de rotation de la « cuillère » laser dépasse une valeur critique ($\sim 100 \text{ Hz}$ pour ces expériences). Pour des vitesses de rotation plus élevées, des réseaux de tourbillons apparaissent (photo de droite). (Photos de F. Chevy et K. Madison, ENS).

res différentes. Pour cela on tire parti du fait que le niveau d'énergie électronique fondamental d'un atome de rubidium ou de sodium est clivé en deux sous-niveaux par l'interaction hyperfine entre les électrons et le noyau. Les chercheurs de Boulder ont ainsi préparé un mélange quantique de condensats en disposant dans le même piège deux assemblées d'atomes de rubidium, correspondant chacune à un des deux sous-niveaux hyperfins. On peut ensuite coupler de manière cohérente ces assemblées grâce à une onde électromagnétique, ce qui présente une analogie profonde avec l'effet Josephson, couplage cohérent de deux supra-conducteurs à travers une jonction isolante.

Parmi les multiples champs d'application possibles pour ces condensats, un des plus prometteurs est certainement la génération de jets atomiques cohérents et monomodes, par exemple pour mener des expériences de nano-lithographie atomique. Partant d'un condensat piégé magnétiquement, on utilise l'onde radio du refroidissement évaporatif (avec une intensité très atténuée) pour extraire un filet continu d'atomes du centre du condensat. On guide ensuite ces atomes pour qu'ils se déposent sur une surface de manière à reproduire un motif

donné. La parfaite collimation du jet d'atomes – il atteint la limite de résolution fixée par l'inégalité de Heisenberg – en fait un outil très précis pour ces expériences. On parle de « laser à atomes », pour désigner ce type de jets atomiques, issu d'un condensat. Ils ont en effet des propriétés de cohérence transverse ou longitudinale très voisines des faisceaux lasers lumineux. Malheureusement, le flux d'atomes produits par une expérience de condensation est encore très faible : avec 1 million d'atomes par condensat, et un taux de répétition de quelques coups par minutes, il faut 30 ans pour déposer une couche atomique sur une surface d'un cm^2 ! Une des voies de recherche actuelles consiste donc à améliorer de manière très significative ce flux. Un autre thème de recherche vise à généraliser le phénomène de condensation à d'autres systèmes, comme des molécules polyatomiques. Même si le refroidissement de tels objets reste encore acrobatique, les perspectives ouvertes par ces recherches sont fascinantes par le pont qu'on pourrait ainsi jeter entre la physique des « gros » objets que sont les édifices moléculaires, et la cohérence quantique macroscopique qui caractérise les condensats de Bose-Einstein.



Physique statistique

POUR EN SAVOIR PLUS

Pais (A.), « Albert Einstein, la vie et l'œuvre », *InterEditions*, 1993.

Nozières (P.) et Pines (D.), « The Theory of Quantum Liquids », vol. II, *Addison Wesley*, 1990.

Helmerson (K.), Hutchinson (D.), Burnett (K.) et Phillips (W. D.), « Atom lasers », *Physics World*, août 1999, p. 31.

Castin (Y.), Dum (R.) et Sinatra (A.), « Bose condensates make quantum leaps and bounds », *Physics World*, août 1999, p. 37.

Dalfovo (F.), Giorgini (S.), Pitaevskii (L.) et Stringari (S.), « Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases », *Reviews of Modern Physics*, Vol. 71, No. 3, avril 1999.

Cohen-Tannoudji (C.), Cours donnés au Collège de France de 1996 à 2000.

<http://www.lkb.ens.fr/~laloe/PHYS/cours/college-de-france/>

Inguscio (M.), Stringari (S.) et Wieman (C.E.), « Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases, *Proceedings of the International School of Physics « Enrico Fermi »*, course CXL, *IOS Press*, Amsterdam, 1999.

Article proposé par :
Jean Dalibard, tél. 01 44 32 25 34, Jean.Dalibard@physique.ens.fr