Tutorat 1

Équations différentielles

Frédéric Chevy – chevy@lkb.ens.fr
http://www.lkb.ens.fr/ chevy/Tutorat/Tut.html

1 Généralités

L'objet de ce tutorat est d'étudier quelques résultats assez généraux sur les solutions d'équations différentielles, aussi bien linéaires que non linéaires. Bien qu'en général il soit impossible d'exprimer les solutions d'une telle équation à l'aide de fonctions "usuelles", nous verrons que dans le cas où l'espace des phases est de dimension 2, l'existence de théorèmes très généraux nous permettent de décrire qualitativement les solutions de n'importe quelle équation différentielle.

On considère ici uniquement des équations du premier ordre de la forme :

$$\frac{d\overrightarrow{X}}{dt} = \overrightarrow{F}(\overrightarrow{X},t), \tag{1}$$

où $t \mapsto \overrightarrow{X}$ désigne une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$, et plus généralement un espace de Banach (*i.e.* un espace vectoriel normé complet).

1. Rappeler le théorème de Cauchy-Lipschitz.
2. Montrer qu'en posant $\overrightarrow{X} = (y,y',...,y^{(n-1)})$, l'équation différentielle d'ordre n

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)}$$

   se ramène à une équation du type (1) en dimension n.
3. On dit que l'équation différentielle (1) est *autonome* si $\overrightarrow{F} = F(\overrightarrow{X})$ uniquement (autrement dit, F ne dépend pas explicitement du temps). Montrer alors que pour tout a, si $\overrightarrow{X}_0(t)$ est une solution de (1), $\overrightarrow{X}_0(t+a)$ en est une autre.
4. On considère ici une équation différentielle autonome et on note $\mathcal{C}(\overrightarrow{X}_0,t_0)$ la courbe de $\mathbb{R}^n$ décrite par la solution de (1) de condition initiale $\overrightarrow{X}(t_0) = \overrightarrow{X}_0$.

   (a) Montrer que $\forall (t_0,t'_0) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}(\overrightarrow{X}_0,t_0) = \mathcal{C}(\overrightarrow{X}_0,t'_0)$. Dans la suite on posera par conséquent $\mathcal{C}(\overrightarrow{X}_0,t_0) = \mathcal{C}_0(\overrightarrow{X}_0)$.

   (b) Montrer si $\overrightarrow{X}_1 \notin \mathcal{C}_0(\overrightarrow{X}_0)$, alors $\mathcal{C}_0(\overrightarrow{X}_0) \cap \mathcal{C}_0(\overrightarrow{X}_1) = \varnothing$

5. On appelle flot, ou aussi portrait de phase, l'ensemble des courbe $\mathcal{C}_0(\overrightarrow{X}_0)$ lorsque le vecteur $\overrightarrow{X}_0$ décrit le plan. Représenter l'allure du flot de 1 dans le cas où $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{X},t) = A \cdot \overrightarrow{X}$ avec :

   (a)
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
   (b)
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
   (c)
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2 Linéarisation autour d'un point fixe

Il est en général impossible de trouver analytiquement les solutions d'une équation différentielle. Lorsqu'un point fixe peut être trouvé (c'est-à-dire lorsqu'il existe une solution $\overrightarrow{X}(t) = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$), on peut linéariser les équations autour de ce point fixe afin de discuter sa stabilité.

2.1 Cas non dégénéré

On considère ici l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$\ddot{y} + \gamma\dot{y} - (1 - y^2)y = 0 \tag{2}$$

1. Récrire cette équation sous la forme d'un système d'ordre 1 en dimension 2 (cf. question 2).
2. Quels sont les points fixes de l'équation (2).
3. Sans tenter de résoudre explicitement l'équation différentielle, tracer l'allure du flot de l'équation différentiel dans l'espace des phases $(y,\dot{y})$ lorsque $\gamma = 0$.
   Indication : on pourra remarquer que $\dot{y}^2 - y^2(1 - y^2/2)$ est une constante du mouvement.
4. On se place dans le cas $\gamma \neq 0$ et soit y_0 un des points fixes de (2). En posant $y = y_0 + \epsilon$ et en développant le système (2) à l'ordre 1 en ϵ, discuter la stabilité des points fixes.

Considérons plus généralement une fonction $\overrightarrow{F}$ possédant un point fixe en $\overrightarrow{X}_0$. L'étude faite pour l'équation de se généralise grâce au théorème de Poincaré-Lyapunov :

Théorème : Supposons que $\overrightarrow{F}$ puisse s'écrire au voisinage de $\overrightarrow{X}_0$

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{X},t) = A \cdot (\overrightarrow{X} - \overrightarrow{X}_0) + o(\overrightarrow{X} - \overrightarrow{X}_0),$$

où A est une matrice $d \times d$. Sous réserve de régularité suffisante, on a les comportements suivants :

– Si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative, le point fixe est stable.

– Si une valeur propre de A possède une valeur propre de partie réelle strictement positive, le point fixe est instable.

2.2 Cas dégénéré : fonction de Lyapunov

1. On considère le système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 2xy + \epsilon x^3 - 2\omega y \\ \dot{y} & = & -x^2 + \epsilon y^5 + \omega x \end{array} \right.$$

   Montrer que l'origine est un point fixe mais que l'analyse linéaire ne permet pas de conclure quant à sa stabilité.

2. On considère la fonction $H(x,y) = x^2 + 2y^2$. Calculer

$$\frac{d}{dt} H(x(t),y(t))$$

   et conclure quand à la stabilité du point fixe (dans la suite on notera abusivement $\dot{H} = dH(x(t),y(t))/dt$). Y-a-t-il d'autre points fixes?
   Une telle fonction H, monotone et strictement positive en dehors du point fixe, est appelée "fonction de Lyapunov".

3. Connaissez vous des exemples de fonctions de Lyapunov en mécanique?

3 Dynamique en dimension 2

La condition de non recoupement des solution d'une équation différentielle autonome est très forte en dimension 2. Elle aboutit au théorème *Poincaré-Bendixon* :

Théorème : dans le cas d'un système différentiel autonome de dimension $d = 2$, si $\overrightarrow{X}(t)$ est une solution de (1) et reste bornée lorsque $t \to +\infty$ alors, au temps longs, $\overrightarrow{X}$ tend soit vers un point fixe, soit vers une solution périodique.

Autrement dit, en dimension 2, les solutions d'une équation différentielle sont soit divergentes, soit tendent asymptotiquement vers un point fixe ou une solution périodique de 1.

1. *Critère de Bendixon.* On note F_x et F_y les coordonnées de $\overrightarrow{F}$ et on suppose qu'il existe une solution périodique de (1) dont on note $\mathcal{C}$ la trajectoire dans $\mathbb{R}^2$.

   (a) On considère

$$\Gamma_{\mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{C}} F_y dx - F_x dy.$$

   À l'aide de l'équation différentielle (1), montrer que $\Gamma_{\mathcal{C}} = 0$.

(b) En utilisant la formule de Green-Riemann, montrer que si le contour $\mathcal{C}$ est homotope à un point alors :

$$\Gamma_{\mathcal{C}} = -\int\int_{\mathcal{S}} \mathrm{div}(\overrightarrow{F}) d^2S,$$

où $\mathcal{S}$ est la surface enserrée par $\mathcal{C}$.

(c) En déduire que si $\mathrm{div}(\overrightarrow{F})$ est de signe constant, le système différentiel (1) ne possède aucune solution périodique.

(d) *Application* : Montrer que si $\gamma \neq 0$, l'équation $y'' + \gamma y' + f(y) = 0$ ne possède pas de solution périodique.

Indication : on se ramènera au préalable au cas d'un système différentiel d'ordre 1.

2. *Application du théorème de Poincaré-Bendixon* : on considère le système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & -x(x^2+y^2-2x-3)+y \\ \dot{y} & = & -y(x^2+y^2-2x-3)-x \end{array} \right.$$

(a) Chercher les points fixes du système et discuter leur stabilité.

(b) Soit $H(x,y) = x^2 + y^2$. À quelle condition sur (x,y) a-t-on $\dot{H} > 0$?

(c) En déduire qu'il existe au moins une solution périodique dans l'anneau $1 < r < 3$.

4 Aperçu sur la dynamique en dimension 3

Soit le système différentiel suivant d'inconnues $(x(t),y(t),z(t))$, dit des équations de Lorenz :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & \sigma(y-x) \\ \dot{y} & = & Rx - y - xz \\ \dot{z} & = & -Bz + xy \end{array} \right. , \qquad (3)$$

avec $\sigma = 10$, $B = 8/3$, $R = 28$.

1. Trouver les points fixes du système et discuter leur stabilité (on pourra se contenter d'une réponse numérique).
2. Soit $H(x,y,z) = Rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z-2R)^2$. Calculer $\dot{H}$. En déduire que les solutions de (3) sont bornées.
3. Résoudre numériquement le système différentiel pour divers jeux de conditions initiales. Que constate-t-on ?