Tutorat 3

Frédéric Chevy – chevy@lkb.ens.fr

Groupes de Lie et théorème de Noether

1 Exponentielle de matrice et groupes de Lie

Soit M une matrice de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On pose

$$\exp(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}.$$

1. En comparant avec l'exponentielle de nombres réels, montrer que si deux matrices A et B commutent, alors on a $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.
2. Soit $M \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $F(\lambda) = \exp(\lambda M)$. Montrer que pour tout λ_0

$$F(\lambda) = F(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0) M F(\lambda_0) + \mathrm{o}(\lambda - \lambda_0).$$

   En déduire $\dfrac{dF}{d\lambda}(\lambda = 0)$.
3. On rappelle qu'un ensemble $\mathcal{G}$ muni d'une loi de composition interne $\cdot$ est un groupe si et seulement il vérifie les axiomes suivants :

   - $\forall (x,y) \in \mathcal{G}^2$, $x \cdot y \in \mathcal{G}$;
   - Il existe un élément neutre 1 tel que $\forall x \in \mathcal{G}$, $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$;
   - Pour tout $x \in \mathcal{G}$, il existe $y = x^{-1}$ tel que $x \cdot y = y \cdot x = 1$;
   - Pour tout $(x,y,z) \in \mathcal{G}^3$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

   Montrer que $\mathcal{G}_M = \{F(\lambda) | \lambda \in \mathbb{R})\}$ forme un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, baptisé groupe de Lie engendré par M.
4. On considère

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   En notant que $\sigma^2 = -1$, calculer σ^n puis $\exp(\lambda\sigma)$. Caractériser géométriquement $\mathcal{G}_\sigma$.

2 Théorème de Noether

On considère un lagrangien $L(q_i,\dot{q}_i)$, où les $q_{i=1..n}$ désignent les coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On cherche $q_i(t)$ minimisant l'action

$$S = \int L(q_i(t),\dot{q}_i(t))dt.$$

1. Rappeler les équations d'Euler-Lagrange satisfaites par les coordonnées q_i.
2. On suppose le lagrangien invariant par le groupe de Lie $\mathcal{G}_M$, c'est-à-dire que si l'on note $F_{ij}(\lambda)$ les éléments de matrice de $F(\lambda)$ et $q'_i(\lambda) = F_{ij}(\lambda)q_j$, alors
$$\forall\lambda \in \mathbb{R}, L(q_i,\dot{q}_i) = L(q'_i(\lambda),\dot{q}'_i(\lambda)).$$
Dériver cette égalité en $\lambda = 0$ et en déduire que
$$M_{ij}\frac{\partial L}{\partial q_i}q_j + M_{ij}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_j = 0.$$
3. En utilisant les équations d'Euler-Lagrange en déduire que
$$M_{ij}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}q_j$$
est une constante du mouvement. L'existence d'une quantité conservée associée à une symétrie du lagrangien est le théorème de Noether.
4. On considère $L = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - V(x^2 + y^2)$. Montrer que L est invariant sous $\mathcal{G}_\sigma$ où σ a été introduit à la question (4). Quelle est la constante du mouvement associée à cette symétrie?
5. *Question subsidiaire*. Reprendre l'étude pour un lagrangien invariant par un groupe de transformations affines
$$q'_i = F_{ij}(\lambda)q_j + a_i(\lambda),$$
et montrer l'existence d'une constante du mouvement associée à cette symétrie.

L'audacieux Sophus Lie

Sophus Lie (1842-1899) a miraculeusement émergé, comme son prédécesseur Abel, des brumes nordiques où les sciences étaient presque ignorées. Toute sa vie, il s'est étonné de l'audace de sa propre pensée mathématique !

Arild Stubhaug

Sophus Lie est un des grands noms de l'histoire des mathématiques, un des visionnaires, avec Felix Klein, d'une géométrie rénovée. Il a créé une nouvelle discipline, les groupes de Lie, qui s'est développée et ramifiée dans presque toutes les branches des mathématiques et de la physique mathématique. Jean Dieudonné, un des membres fondateurs de Bourbaki, a écrit qu'aucun travail sérieux ne pouvait plus être réalisé en mathématiques sans recours aux groupes de Lie. C'est dire ! Grâce aux travaux d'une longue série de mathématiciens et de physiciens, parmi lesquels Élie Cartan et Hermann Weyl, la physique d'aujourd'hui, où l'on sait le rôle prépondérant que joue la symétrie, tire abondamment profit de la théorie de Lie.

Sophus Lie a 26 ans quand il découvre, selon ses propres termes, qu'il « abrite un mathématicien » (il souhaitait devenir astronome). Quand il repensera sa carrière, il constatera avec satisfaction qu'il doit davantage à « l'audace de sa pensée » qu'aux connaissances tirées de ses études. Puissant travailleur, il a, en 30 années de recherche, publié plus de 8000 pages d'écrits mathématiques.

1. **Sophus Lie** dessiné par son collègue Gustav Lœrum.

Fils de pasteur

Lie naît le 17 décembre 1842 à Nordfjordeid, une petite ville à l'Ouest de la Norvège. Avant-dernier de sept enfants, il grandit dans le presbytère d'un père révéré en tant que pasteur et serviteur de l'État intéressé tout particulièrement à l'instruction publique. La mère de Sophus est généreuse et aimante. Quand Sophus a neuf ans, la famille s'installe à Moss, au Sud-Est d'Oslo, où son père sera pasteur jusqu'à sa mort, 22 ans plus tard.

Un an après le déménagement à Moss, sa mère meurt et Sophus, qui a dix ans, sort brutalement de l'enfance et acquiert le sérieux qui convient au fils d'un guide spirituel. Le jeune Sophus passe de la cinquième à la première place de sa classe et sa scolarité est marquée, dès le début, par un large éventail de goûts. L'école de Moss n'offre pas la préparation au certificat final, le baccalauréat, aussi, à 15 ans, Lie va étudier à l'École Hartvig Nissen, dans la capitale de la Norvège, alors dénommée Christiana. Cette école a été fondée quatorze ans plus tôt par les deux plus éminents réformateurs du système éducatif norvégien, Nissen et son ami Ole Jacob Broch, mathématicien et politicien (rare combinaison), qui sera directeur du Bureau international des poids et mesures de Sèvres !

Le but de cette école, au prestige énorme, est de donner aux langues modernes et aux sciences une meilleure place que dans les écoles latinistes traditionnelles. Sophus s'intéresse à un processus de réforme scolaire qui, comme dans tous les pays et de tout temps, alimente le débat public : aussi écrira-t- il plusieurs articles sur les améliorations à apporter au système norvégien, en le comparant aux systèmes allemand et français, et soulignera le rôle de fer de lance de l'Université. Après deux années à l'École Nissen, Sophus décroche son diplôme avec d'excellentes notes. Seuls une centaine de bacheliers norvégiens sont qualifiés pour des études universitaires. Sophus passe, en tête de sa classe et en trois semestres, des examens de qualification ardus. Tout l'intéresse, mais son choix se porte sur les sciences, qui n'ont, à l'époque, pour seul débouché, que le professorat dans un lycée : aussi, parmi les 560 étudiants de l'Université d'Oslo, seuls une dizaine choisissent les sciences.

Les études entreprises par Sophus Lie se divisent en trois domaines. La première partie, portant sur les mathématiques, la géométrie, la mécanique, les constructions mécaniques et le dessin technique, est la plus ardue. Il a pour professeurs Broch et Carl Anton Bjerknes ; le mathématicien Ludwig Sylow, de réputation mondiale en théorie des groupes (il continuera les travaux de Lagrange sur le sujet en précisant les caractéristiques d'un sous-groupe), remplace pendant quelques semestres Broch, nommé ministre.

Le cours de Sylow, en 1862-1863, compte trois étudiants (dont Sophus) et, grande nouveauté, il porte sur la théorie des équations algébriques d'Abel et de Galois. Il marquera plus durablement Sophus que les cours de physique-chimie et d'histoire naturelle où ses résultats ne sont pas aussi brillants. De ce fait, il n'obtient pas à son diplôme la mention qu'il espérait et en sera affecté : les dernières années d'études l'ont rendu mélancolique et excentrique, peu confiant dans ses « capacités intellectuelles ». La rigueur d'une éducation protestante n'admettait pas les défaillances et l'on discerne déjà une tendance à la dépression.

Il est heureusement entouré d'amis avec qui il se promène le week-end le long du fjord et dans les forêts d'Oslo. Il pratique la gymnastique, s'entraînant aux anneaux et au cheval-d'arçon ; en hiver, il skie, patine et fait de la luge. Lie est fidèle en amitié : Ernst Motzfeldt, son camarade de classe à l'École Nissen, deviendra avocat, puis haut fonctionnaire, et restera toute sa vie l'ami et le défenseur de Sophus.

Pendant sept ans, Sophus loge chez la mère de son ami Ernst Motzfeldt, laquelle le traite comme un fils. Lie tire plaisir et bénéfice des conférences de *L'Association réaliste*, constituée par des étudiants en science ; chaque grande discipline universitaire a sa propre association dont le but est d'approfondir et de compléter le cursus. Lie est le membre le plus actif de *L'Association réaliste*, et il donne une série de conférences de géométrie devant une douzaine d'auditeurs.

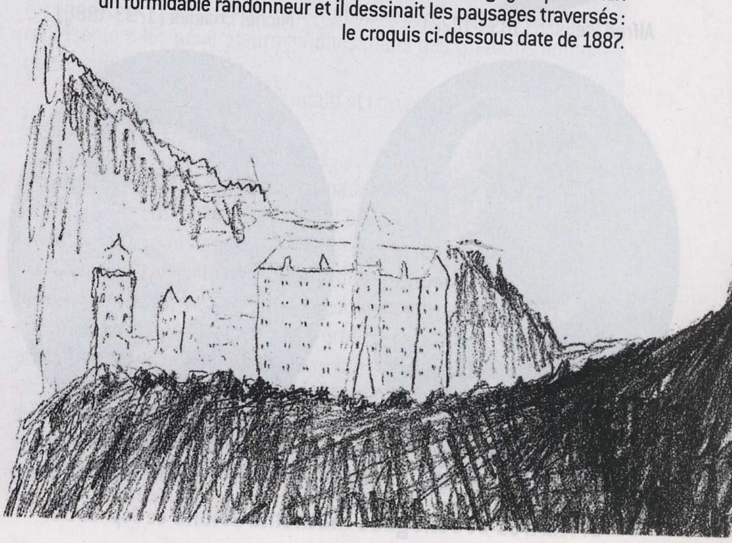
Après l'obtention de son diplôme, Lie s'intéresse à l'astronomie, l'enseigne ou la vulgarise, et suit un enseignement pratique à l'observatoire, sans obtenir le poste d'astronome auquel il aspire. Pour gagner sa vie, Lie fait des remplacements à l'École Nissen où il prépare aux examens les étudiants en mathématiques, physique et astronomie. Il est un professeur très apprécié.

Mathématicien péripatéticien

La gymnastique et le sport sont à la mode. Sophus Lie est un gymnaste et sportif confirmé et un formidable montagnard. Quand *L'Association touristique norvégienne* est fondée en 1868 pour améliorer le confort des alpinistes, Sophus Lie utilise les refuges qu'elle propose. Car c'est un extraordinaire randonneur : 30 à 40 kilomètres constituent une journée de marche normale, 70 à 80, une randonnée sportive. On rapporte qu'il a, un jour, fait l'aller-retour entre la capitale et Moss, soit une centaine de kilomètres, pour aller chercher un livre qu'il avait oublié. Il marche si vite qu'on le prend pour un clochard, ou pire, quand il passe en flèche dans ses vêtements de grosse toile, râpés et retroussés aux jambes et aux bras.

Son insertion sociale est moins réussie : il n'a pas de vocation, ce qui le tracasse et l'empêche de trouver la paix intérieure. Il se sent isolé. En mars 1868, il écrit à son ami Motzfeldt : « Quand je t'ai dit au revoir avant Noël, je pensais que c'était pour toujours. J'avais l'intention de me suicider. Mais je n'en ai pas la force. Il va donc falloir que j'essaie de vivre. » Ne pas savoir ce qu'on veut faire dans la vie est alors une tare : le choix d'une carrière (et l'obligation personnelle et morale de s'y tenir) est un idéal social. Sophus Lie ne découvre sa vocation qu'en 1868 (à 26 ans !), après une rencontre avec le mathématicien danois Hyeronymus Zeuthen. Zeuthen a étudié à Paris sous la direction du géomètre

2. Sophus Lie, homme d'intérieur et homme d'extérieur.
Ci dessus, photographié avec sa femme Anna, son fils Hermann, sa fille aînée Marie et sa fille cadette Dagny. Sophus était un formidable randonneur et il dessinait les paysages traversés : le croquis ci-dessous date de 1887.



Ludwig Sylow (1832-1918)

Ole Jacob Broch (1818-1889)

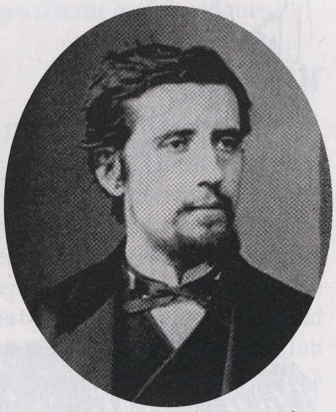
Jean-Victor Poncelet (1788-1867)

Julius Plücker (1801-1868)

Alfred Clebsch (1833-1872)

Michel Chasles (1793-1880)

Felix Klein (1849-1925)



Gaston Darboux (1842-1917)

3. Maîtres et collègues mathématiciens de Sophus Lie.

Michel Chasles et cette rencontre incite Lie à lire avec ravissement le *Traité des propriétés projectives des figures* de Jean-Victor Poncelet. Une des innovations de Poncelet était l'introduction et l'utilisation des nombres complexes en géométrie projective. Le sujet fascine Sophus qui dévore, en plus de la géométrie de Poncelet, les travaux de l'Allemand Julius Plücker : il ne rencontrera hélas, ni l'un ni l'autre.

Au début de 1869, Lie achève son premier traité sur la représentation réelle des nombres imaginaires, publication aujourd'hui « étrange », car notre vision des nombres complexes en géométrie est fort différente de celle des années 1860 et certains aspects sont aujourd'hui oubliés. Les mathématiques se diversifient et certains domaines deviennent caducs, alors que les autres sciences, comme la physique, progressent en s'attachant à expliquer le réel. Lie examinait ainsi l'ensemble des droites (aujourd'hui le « complexe de Reye ») qui coupent selon un birapport constant les plans constituant les faces d'un tétraèdre et le résolvait en engendrant ces droites par les éléments d'un groupe qui laissent invariant les sommets du tétraèdre.

Son article de huit pages de 1869 est accueilli avec plus d'admiration que de compréhension par les deux plus éminents professeurs de mathématiques du pays, Broch et Bjerknes ; il est publié en allemand la même année dans le prestigieux *Journal de Crelle*. Sophus Lie attire ainsi l'attention et peut demander une bourse de voyage pour Berlin, Göttingen et Paris ; à son retour, il est nommé membre de l'Université, et un an plus tard professeur de mathématiques.

Ce premier voyage à l'étranger est capital. Il y rencontre les mathématiciens qui inspireront son travail et qui resteront à vie ses amis et collègues, notamment, à Berlin, Felix Klein, à Göttingen, Alfred Clebsch et, à Paris, Gaston Darboux et Camille Jordan. Lie devient le meilleur ami de Klein, et ils publient trois articles de géométrie, l'un d'eux, en 1870, sur des transformations de contact qui établissent une bijection entre droites et sphères de façon que des sphères tangentes correspondent à des droites concourantes. Klein y est venu rendre visite à Lie, et ils voient ensemble Darboux et Jordan. Ils s'intéressent aux travaux de Darboux sur la courbure des surfaces ; Jordan, travaillant sur les idées d'Abel et de Galois, vient de publier son *Mémoire sur les groupes de transformations*, sujet que Lie a étudié grâce au cours de Sylow.

Héros malgré lui

Quand éclate la guerre franco-prussienne en juillet 1870, Klein doit quitter précipitamment Paris, car il est appelé sous les drapeaux dans la guerre contre la France : il passe la frontière, mais tombe malade et ne combat pas. Lie deviendra célèbre par un fait d'armes passif. Il décide d'aller à pied de Paris à Milan pour voir le mathématicien Luigi Cremona, mais, arrivé à Fontainebleau, il est emprisonné, soupçonné d'être un espion allemand. La « une » d'un quotidien norvégien titre : *Scientifique norvégien emprisonné comme espion allemand.*

Lie racontera le mois passé en prison à Fontainebleau : les gardiens de prison sont persuadés que les symboles mathématiques de ses carnets sont des codes, mais ils lui laissent néanmoins une chance de prouver qu'il est un mathématicien en voyage. Le danger de la situation incite Lie à les convaincre de sa qualité et il commence : « Messieurs,

4. Groupes, groupes de Lie et algèbres de Lie

La notion de groupe, introduite au début du XIXe siècle par Évariste Galois lors de ses travaux sur la résolubilité des équations algébriques, s'est révélée d'une grande richesse : la théorie des groupes irrigue aujourd'hui une bonne partie des mathématiques, la physique des particules élémentaires, la science des cristaux et celle des molécules, etc.

Les groupes les plus simples sont les groupes finis, qui contiennent un nombre limité d'éléments. Par des chemins divers, notamment en relation avec l'étude des équations différentielles, Sophus Lie a fondé, dans les années 1870-1880, la théorie des groupes continus. Ces groupes contiennent une infinité d'éléments que l'on peut étiqueter par un ou plusieurs paramètres variant de façon continue. On les nomme aujourd'hui groupes de Lie. Comme l'ont montré les travaux de Sophus Lie, ces structures mathématiques sont étroitement liées à d'autres structures, les algèbres de Lie.

Considérons un exemple de groupe fini, un ensemble de six transformations : les permutations de trois objets A, B et C. Partant de ABC, on a six résultats possibles : ABC, CAB, BCA, ACB, BAC et CBA. Notons les transformations correspondantes **I** (pour « identité »), p, q, r, s et t, respectivement. Par exemple, la permutation s consiste à échanger les deux premiers objets et à ne pas toucher au troisième : $s(\mathrm{ABC}) = \mathrm{BAC}$. Appliquons successivement deux permutations, disons d'abord s et ensuite r, à ABC : cela s'écrit $r \circ s(\mathrm{ABC}) = r[s(\mathrm{ABC})] = r(\mathrm{BAC}) = \mathrm{BCA}$ puisque r laisse inchangé le premier objet et échange les deux derniers. On voit donc que $r \circ s = q$. On trouverait de la même façon que $s \circ r = p$, c'est-à-dire que $r \circ s$ n'est pas égal à $s \circ r$: ce groupe n'est pas commutatif. Cet ensemble G des permutations vérifie les propriétés suivantes :

• La composition (ou « produit ») de deux éléments de G est un élément de G.

• Associativité : quels que soient les éléments x, y et z de G, on a $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$.

• Existence d'un élément neutre **I** : quel que soit l'élément x de G, on a $\mathbf{I} \circ x = x \circ \mathbf{I} = \mathbf{I}$.

• Existence des inverses : quel que soit x de G, il existe un élément x' de G tel que $x \circ x' = x' \circ x = \mathbf{I}$.

Tout ensemble G dont les éléments vérifient ces quatre propriétés est, par définition, un groupe (l'opération interne, notée ici $\circ$, peut être autre chose qu'un produit de composition).

Considérons à présent un exemple de groupe de Lie dans le plan, les rotations $R(a)$ d'angle a autour de l'origine du système de coordonnées. L'ensemble de ces rotations, pour toutes les valeurs possibles de l'angle a, forme un groupe noté SO(2) :

• une rotation d'angle a suivie d'une rotation d'angle b est encore une rotation, d'angle $a + b$;

• on a $[R(a) \circ R(b)] \circ R(c) = R(a) \circ [R(b) \circ R(c)]$;

• pour tout a, on a $\mathbf{I} \circ R(a) = R(a) \circ \mathbf{I} = R(a)$ (**I** étant la transformation identité, c'est-à-dire la rotation $R(0)$ d'angle nul) ;

• pour tout a, on a $R(a) \circ R(-a) = R(-a) \circ R(a) = \mathbf{I}$.

Ce groupe de rotations est un groupe de Lie à un paramètre, celui-ci étant l'angle de rotation. Pour qu'un groupe infini soit un groupe de Lie, des conditions de régularité doivent être vérifiées ; elles garantissent notamment que l'on peut passer régulièrement d'un élément du groupe à un autre en faisant varier continûment le paramètre. C'est le cas pour le groupe des rotations considéré.

Le groupe SO(2) est un groupe de Lie un peu trop simple, car commutatif : $R(a) \circ R(b)$ est égal à $R(b) \circ R(a)$ pour toutes les valeurs de a et de b. Dans l'espace à trois dimensions, le groupe SO(3) des rotations autour de l'origine n'est pas commutatif. Par exemple, si R_x et R_z désignent les rotations d'angle 90° autour des axes Ox et Oz respectivement, la transformation $R_x \circ R_z$ transforme le point (x, y, z) de coordonnées (1, 0, 0) en le point (0, 0, 1), tandis que $R_z \circ R_x$ le transforme en le point (0, 1, 0) : autrement dit, $R_x \circ R_z$ n'est pas égal à $R_z \circ R_x$.

Des informations importantes sur un tel groupe sont fournies par l'algèbre de Lie qui lui est associée. C'est une structure mathématique qui apparaît lorsqu'on étudie le groupe au voisinage de l'identité, c'est-à-dire pour des angles de rotation infinitésimaux dans le cas d'un groupe de rotations. Pour comprendre, revenons au cas simple des rotations dans le plan. Dans une rotation d'angle a autour de l'origine, tout point (x, y) du plan est transformé en un point (x', y'), avec $x' = (\cos a)\, x - (\sin a)\, y$ et $y' = (\sin a)\, x + (\cos a)\, y$. Cette rotation peut s'écrire sous la forme d'une matrice 2×2 :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Si l'angle a est très petit (et exprimé en radians), $\sin a$ est à peu près égal à a et $\cos a$ à 1 ; dans ce cas, la rotation d'angle infinitésimal a correspond à la transformation $x' = x - ay$ et $y' = ax + y$. Sous forme matricielle, la rotation s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}}_{aL} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où I est la transformation identité (rotation d'angle nul) et L est le « générateur infinitésimal » des rotations dans le plan. Une rotation plane d'angle a quelconque s'exprime alors de façon simple (par exponentiation) en termes de a et du générateur infinitésimal : $R(a) = \exp(a\mathrm{L})$.

Dans le cas de SO(3), les rotations dans l'espace, la formulation, bien que plus compliquée, est analogue. Il y a trois paramètres pour décrire le groupe, car une rotation quelconque peut être décomposée en trois rotations successives d'angles a, b et c autour, respectivement, des axes Ox, Oy et Oz. Pour des angles infinitésimaux, on obtient :

$$R(a, b, c) = \mathrm{I} + a\mathrm{L}_x + b\mathrm{L}_y + c\mathrm{L}_z$$

où I est la transformation identité (matrice unité à trois dimensions) et L_x, L_y et L_z sont des matrices 3×3 constantes, qui représentent les générateurs infinitésimaux des rotations autour de chacun des trois axes.

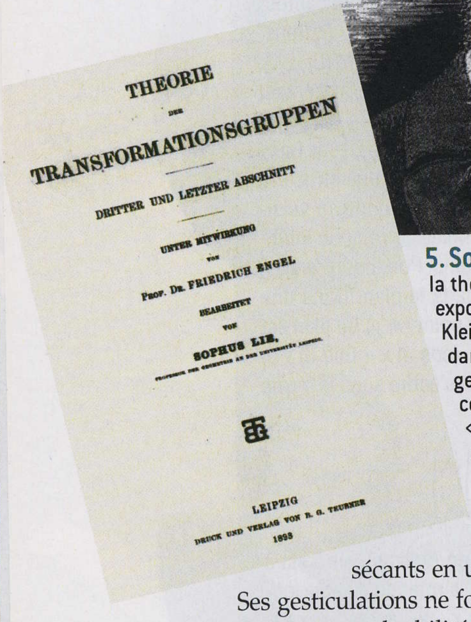
Le groupe n'est pas commutatif et l'on montre que ces générateurs satisfont aux relations :

$$(*) \quad \mathrm{L}_x\mathrm{L}_y - \mathrm{L}_y\mathrm{L}_x = \mathrm{L}_z,\ \mathrm{L}_y\mathrm{L}_z - \mathrm{L}_z\mathrm{L}_y = \mathrm{L}_x,\ \mathrm{L}_z\mathrm{L}_x - \mathrm{L}_x\mathrm{L}_z = \mathrm{L}_y.$$

Pour des angles non infinitésimaux, la rotation s'écrit sous la forme d'un produit de trois matrices construites avec les générateurs infinitésimaux : $R(a, b, c) = \exp(a\mathrm{L}_x)\exp(b\mathrm{L}_y)\exp(c\mathrm{L}_z)$.

La structure mathématique constituée par les générateurs infinitésimaux d'un groupe (et leurs combinaisons) vérifie des propriétés générales, indépendantes du groupe considéré, et définissent une algèbre dite de Lie.

Les relations (*) ci-dessus sont spécifiques et varient d'une algèbre de Lie à une autre. La caractérisation des liens (non univoques) qui existent entre une algèbre de Lie et le groupe de Lie a été l'un des principaux chantiers de la théorie des groupes.



THEORIE
DER
TRANSFORMATIONSGRUPPEN

DRITTER UND LETZTER ABSCHNITT

UNTER MITWIRKUNG
VON
PROF. DR. FRIEDRICH ENGEL
BEARBEITET
VON
SOPHUS LIE,

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1893

5. Sophus Lie et son œuvre principale, la théorie des groupes de transformation. Il y expose une partie de ses ressentiments contre Klein, qui à son avis, ne lui a pas rendu justice dans la conception du programme d'Erlangen, programme qui exprimait leurs vues conjointes sur le traitement de la géométrie. « Je ne suis pas un élève de Klein, écrit Lie, ni Klein mon élève, bien que cela puisse être plus prêt de la vérité.»

imaginez trois axes perpendiculaires sécants en un point, l'axe x, l'axe y et l'axe z...». Ses gesticulations ne font qu'aggraver son cas et tendent à prouver sa culpabilité. Quand Lie leur demande ce qu'ils font habituellement de leurs prisonniers, on lui répond : « Nous les fusillons à six heures du matin. »

Heureusement, Darboux, qui a des relations en haut lieu, fait libérer le prisonnier. Des années plus tard, Lie notera que sa détention à Fontainebleau a été une période de paix et de calme pendant laquelle il a écrit l'essentiel de sa thèse de doctorat : les mathématiciens tirent mieux parti d'une incarcération que quiconque. La thèse, qu'il soutient devant un auditoire ahuri à Oslo un an plus tard, s'intitule « Une classe de transformations géométriques. » À en croire E. Holst, ami et premier biographe de Lie, le jury de thèse norvégien est aussi incompétent que les gardiens de prison français.

Sophus Lie, prophète en son pays

En Europe, les recherches de Lie sont plus appréciées : Darboux juge que la thèse est une des plus belles découvertes de la géométrie moderne. L'administration norvégienne donne à Lie de meilleures conditions de travail et, en 1872, les membres du Parlement présentent une motion afin de créer une chaire de professeur extraordinaire pour Sophus Lie. Ils ne veulent pas répéter l'erreur commise avec Abel qui n'a jamais obtenu de poste : Sophus Lie devient professeur à trente ans. Ce même automne, en septembre 1872, il se rend en Allemagne pour rencontrer Felix Klein. Celui-ci, nommé professeur à Erlangen, prépare sa conférence inaugurale, le célèbre programme d'Erlangen, qui sera source de friction future.

Après son court séjour allemand, Lie rentre à Oslo très amoureux. Il a rencontré quelques mois auparavant Anna Birch, âgée de 18 ans et cousine de son ami Motzfeldt et il la demande en mariage par écrit ! *O tempora, o mores*. La demande surprend tous ses amis, qui ont abandonné l'idée de le voir un jour marié. Le grand-père d'Anna était l'oncle d'Abel, et Sophus voit là un signe. Il écrit : « Vous ne pouvez pas imaginer comme cela me semble une coïncidence étrange que ma fiancée soit une proche parente d'Abel, mon idéal inaccessible. » Ils se marient 20 mois plus tard, après quelques hésitations de la part d'Anna, car, à l'époque, 30 ans est l'âge canonique des « barbons ». Après son mariage, la vie de Sophus Lie comprend trois parties : les années à Oslo, jusqu'en 1886, puis douze années à Leipzig et enfin un court retour en Norvège avant sa mort. Lors de ses années à Oslo, il travaille d'arrache-pied sans aucune compagnie scientifique stimulante, mais sa vie de famille est harmonieuse ; Sophus et Anna s'entendent bien et ils ont trois enfants.

La transformation droite-sphère que Lie a développée en une théorie générale de transformation dite de contact le conduit au cœur de son œuvre. À partir de 1873, il entreprend un classement systématique des groupes de transformations, et veut appliquer les résultats obtenus à la recherche des solutions des équations différentielles. Inspiré par Darboux, il publie également des études sur les surfaces minimales.

En réaction contre le conservatisme de la communauté scientifique norvégienne, Lie participe à la création d'un nouveau journal où il publie un grand nombre d'articles, souvent des premiers jets, ou des prépublications dont les versions définitives sont publiées ensuite dans des journaux étrangers plus connus. En 1881, il conseille à Mittag-Leffler de créer un journal de mathématiques scandinave. Sa suggestion débouche l'année suivante sur la naissance d'*Acta Mathematica*, aujourd'hui encore un journal mathématique prestigieux.

En 1882, Lie travaille avec Klein et son ami Adolph Mayer à Leipzig, et séjourne deux mois à Paris où il échange des idées avec Darboux, Jordan, Hermite, Poincaré, Picard, Halphén, Lévy ; ceux-ci ont conscience de l'importance des recherches et théories de Lie. En 1884, Klein et Mayer veulent lui faciliter la vie et lui envoient leur étudiant Friedrich Engel pour le seconder dans la formulation et la rédaction de ses idées. Le travail d'Engel et de Lie se transforme en trois volumes, *Theorie der Transformationsgruppen* (Théorie des groupes de transformations), qui paraissent en 1888, 1890 et 1893, en tout plus de deux mille pages.

En 1886, on offre à Lie la chaire de professeur à Leipzig (où il succède à Klein), une position prestigieuse dans un environnement scientifique stimulant où il devient une figure de proue de la communauté mathématique : des étudiants français et américains viennent étudier auprès de lui, comme Arthur Tresse et Ernest Vessiot de l'École normale supérieure. La famille Lie est bien reçue à Leipzig ; Anna et les enfants sont si bien intégrés qu'il leur sera difficile de revenir en Norvège. Sophus contribue à l'éducation intellectuelle et sportive de ses enfants : les dimanches, toute la famille part pour de longues promenades, en hiver sur des skis norvégiens, une nouveauté à Leipzig. Quand il passe avec ses enfants les gens les montrent du doigt en s'écriant : « Des eskimos ! »

Toutefois, l'enseignement et l'encadrement des étudiants commencent à l'accaparer et il se lasse d'être en permanence mobilisé par des étudiants médiocres. Les « Champs-Élysées de Leipzig » ne sont pas le paradis espéré : Lie ne maîtrise pas complètement l'allemand et l'université est le théâtre de divisions politiques et de conflits personnels dont les motifs lui échappent et que son éducation protestante l'amène à juger sévèrement. Ses amis de Christiana et la nature norvégienne commencent à lui manquer.

Des problèmes de collaboration apparaissent : le conflit est, en grande partie, lié à la volonté de Lie de travailler dans des domaines où peu de personnes ont accès. Il craint d'être mal compris et que l'on abuse de lui. Ces désaccords lui font perdre le sommeil et le dépriment : il est selon ses propres termes « en proie à un désespoir insondable ». En novembre 1889, on l'envoie dans une clinique psychiatrique près de Hanovre. Il y reste sept mois, traité par l'opium et des somnifères, mais il prétend que c'est grâce à de longues marches qu'il guérit.

Quand sa femme Anna vient le chercher, le bulletin de sortie évoque néanmoins une mélancolie non guérie. En effet, il ne sera plus jamais le même. Les difficultés de collaboration s'intensifient et ses soupçons détruisent les vieilles amitiés : Lie est devenu paranoïaque, accusant les autres de voler ses idées. La démarcation entre utilisation et vol est ténue, nous l'avons vu avec beaucoup d'homme de sciences ! Sa relation avec Klein tourne à l'aigre : Klein est plus souple dans la perception des idées des autres, idées qu'il sait réunir grâce à son immense talent, Lie est plus introverti dans ses recherches, d'où sa réflexion sur l'audace de sa pensée.

6. « Un théorème de M. Sophus Lie domine »

Henri Poincaré, dans *La science et l'hypothèse*, a apprécié le travail de Sophus Lie en géometrie : « Le nombre des axiomes implicitement introduits dans les démonstrations classiques est plus grand qu'il ne serait nécessaire, et on a cherché à le réduire au minimum. M. Hilbert semble avoir donné la solution définitive de ce problème. On pouvait *a priori* se demander d'abord si cette réduction est possible, si le nombre des axiomes nécessaires et celui des géométries imaginables n'est pas infini.

Un théorème de M. Sophus Lie domine toute cette discussion. On peut l'énoncer ainsi :

Supposons qu'on admette les prémisses suivantes :

1° L'espace a *n* dimensions.

2° Le mouvement d'une figure invariable est possible.

3° Il faut *p* conditions pour déterminer la position de cette figure dans l'espace.

Le nombre des géométries compatibles avec ces prémisses sera limité.

Je puis même ajouter que si *n* est donné, on peut assigner à *p* une limite supérieure.

Si donc on admet la possibilité du mouvement, on ne pourra inventer qu'un nombre fini (et même assez restreint) de géométries à trois dimensions. »

Sophus Lie, génie malheureux

Lie continue son travail mathématique créatif, qui est publié, diffusé et de plus en plus apprécié. La reconnaissance publique qui le touche le plus est son admission à l'Académie des sciences de Paris en 1892 et c'est un artisan de la réconciliation franco-allemande. En 1893, sur invitation de Darboux et Tannery, Lie se rend de nouveau à Paris et apprécie sa rencontre avec Élie Cartan, qui est sans doute sa motivation première pour venir à Paris (il ne le connaît qu'indirectement, par l'intermédiaire de son étudiant Tresse, lequel a montré à Cartan les travaux de Lie). Ainsi, en avril 1893, on voit souvent Lie et Cartan (et d'autres mathématiciens) attablés au Café de la Source, où Lie couvre régulièrement de symboles mathématiques le plateau de marbre blanc de la table.

Lie pense qu'avant de pouvoir utiliser la théorie des groupes de transformations pour résoudre les équations différentielles, il est nécessaire de classifier la structure de tous les groupes de transformations de dimension finie. L'année suivante, en 1894, Élie Cartan, qui travaille depuis un an à un article sur les groupes de transformations simples, publie son merveilleux article *Sur la structure des groupes finis et continus*. Leurs travaux respectifs convergent.

En 1895, Lie est encore invité avec les honneurs à Paris, pour le centenaire de l'École normale supérieure. À cette occasion, en hommage à ses travaux sur la théorie de Galois des équations différentielles, on lui demande de prononcer le discours sur Évariste Galois, et cela, bien que Picard soit en train de rédiger une biographie de Galois.

Lie est également apprécié en Norvège et, dans les années 1890, il se plaint tant de la vie à Leipzig que beaucoup pensent qu'il est grand temps que l'enfant illustre de la Norvège rentre au pays. Une autre raison est que la Norvège veut rassembler ses forces vives dans la lutte pour l'indépendance. Depuis 1814, la Norvège forme une union politique avec la Suède, union qui sera dissoute pacifiquement en 1905. Le Parlement change le titre de la chaire de Lie, qui devient *Professeur de théorie des groupes de transformations*, et lui offre un salaire presque double de celui de professeur d'université ordinaire. En 1897, Lie reçoit le prestigieux prix Lobatchevski qui couronne des travaux exceptionnels en géométrie, en géométrie non euclidienne en particulier.

Hélas, quand Sophus Lie rentre en Norvège à l'été 1898, tout le monde remarque qu'il est malade. Il souffre d'anémie pernicieuse, maladie incurable à l'époque et qui le minait probablement depuis plusieurs années. À l'automne, il parvient à peine à donner ses cours, même de son lit. Il meurt le 18 février 1899.

Les nombreuses nécrologies qui paraissent alors soulignent qu'il laisse derrière lui une œuvre inachevée. On reconnaît aujourd'hui unanimement que l'outil créé par Lie dans l'étude des équations différentielles, et qu'il a développé en théorie des groupes de transformations, est devenu (grâce aux travaux d'Élie Cartan, Hermann Weyl, Claude Chevalley et d'autres) une branche des mathématiques pleine et entière : la théorie des groupes de Lie et des algèbres de Lie, qui intervient dans de vastes domaines des mathématiques et de la physique mathématique.

Cette reconnaissance universelle confirme la confiance de Lie dans l'audace de sa pensée mathématique. Toutefois quand son travail mathématique démentait son intuition, il se mettait à douter de lui-même et cela le rendait atrocement malheureux, jusqu'à la démence. De surcroît il était assez possessif et il dépréciait toutes les simplifications et éclaircissements apportés à son œuvre. Il n'y a pas de génie heureux.

ARILD STUBHAUG est historien des sciences et travaille au Département de mathématiques de l'Université d'Oslo.

A. STUBHAUG, *Sophus Lie, une pensée audacieuse*, Springer-Verlag, 2005.

A. STUBHAUG, *Niels Henrik Abel et son époque*, Springer-Verlag, 2004.

TH. HAWKINS, *Emergence of the theory of Lie groups*, Springer-Verlag, 2000.