Tutorat 2

Ensembles fractals

Frédéric Chevy – chevy@lkb.ens.fr

1 Dimension fractale

Considérons un sous-ensemble $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^n$, une droite une surface... Si il existe un homéomor-¡phisme de $\mathcal{S}$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$, on dira que $\mathcal{S}$ est de dimension topologique d. Ainsi, un point, une courbe et une surface sont respectivement de dimensions topologiques 0, 1 et 2.
Au long du XX$^{\text{ème}}$, les mathématiciens ont mis à jours des ensembles (ce que l'on appelle aujourd'hui des objets *fractals*) dont la structure complexe a nécessité la généralisation du concept de dimension à des valeurs non entières, dites dimensions fractales. Ces objets ce sont révélés par la suite d'une grande utilité en physique, puisqu'on a pu montrer au cours des années 80 qu'ils permettaient de décrire des phénomène complexes tels que la turbulence ou la formation d'agrégats.

1.1 Activités d'éveil : la dimension de boîte

N.B. : Dans les questions (1.1) et (1.2), on pourra se contenter de raisonnements "avec les mains".
Soit un ensemble $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^2$. On cherche ici à calculer le nombre $N(\epsilon)$ de carré de côté ϵ nécessaire pour recouvrir $\mathcal{S}$.

1. Justifier brièvement que l'on attend $N(\epsilon) \propto \epsilon^{-D}$ avec $D = 0, 1, 2$ si $\mathcal{S}$ est un point, une courbe ou une surface.
2. Tester "expérimentalement" le résultat précédent sur la sinusoïde et le rond noir fournis en annexe.
3. Même question dans le cas de la longueur de la côte de Grande-Bretagne (îles et Irlande comprises). Qu'observe-t-on ? Expliquer ce phénomène.

L'étude des trois exemples précédents amène à définir une nouvelle dimension D_b, dite dimension de boîte, telle que :

$$D_b = \lim_{\epsilon \to 0} \left| \frac{\ln(N(\epsilon))}{\ln(\epsilon)} \right| .$$

Cette dimension D_b mesure alors le degré de complexité de $\mathcal{S}$: plus $\mathcal{S}$ sera "torturé", plus D_b sera grande.

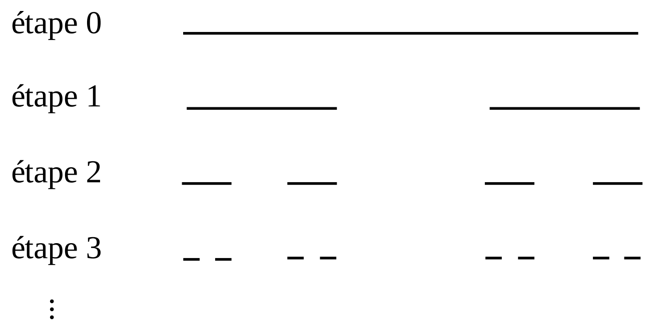

FIG. 1 – Construction de l'ensemble de Cantor.

1.2 Un exemple d'objet fractal : l'ensemble de Cantor

Un exemple classique d'ensemble fractal est l'ensemble de Cantor que l'on construit itérativement de la façon suivante :

• On part du segment [0,1] que l'on coupe en trois segments fermés de même longueur et on élimine le segment central.
• On coupe ensuite chaque segment restant en trois segments de longueur égale et on rejette à chaque fois le segment central.
• On itère ensuite indéfiniment ce processus. Les points non éliminés après une infinité d'étapes forment l'ensemble de *Cantor* $\mathcal{K}_3$.

1. Montrer que $\mathcal{K}_3$ est formé des réels x de la forme :

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 3^{-n},$$

   avec $n = 0, 2$ (On pourra raisonner en base 3).
   En déduire que $\mathcal{K}_3$ est indénombrable.
2. Calculer la dimension de boîte de $\mathcal{K}_3$.
3. Chercher dans la littérature ou sur internet d'autres exemples d'objets fractals.

2 Distance de Hausdorff et convergence des suites d'ensembles

Nous avons vu que l'ensemble de Cantor se définissait comme limites d'une suite de compacts d'un espace métrique $\mathcal{E}$. Afin de préciser cette notion de "limite de suite d'ensembles", nous allons dans cette partie montrer qu'il est possible de définir une distance H sur l'ensemble $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ des compacts de $\mathcal{E}$, dite *distance de Hausdorff*.
On trouvera des rappels de topologie en fin d'énoncé.

2.1 Préliminaire : théorème du point fixe

Soit $\mathcal{E}$ un espace métrique complet. On dit que l'application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est k-contractante s'il existe $k \in]0, 1[$ tel que pour tout couple (x, y) d'éléments de $\mathcal{E}$ on a :

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

On désire montrer dans ce préliminaire que toute application f k-contractante admet un unique point fixe x_0 vérifiant $f(x_0) = x_0$.

1. Montrer que si x_0 existe, alors il est unique.
2. On considère la suite u d'éléments de $\mathcal{E}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & a \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \quad n \geq 1, \end{cases}$$

où a est un élément quelconque de $\mathcal{E}$.

   (a) Montrer que f est continue. En déduire que si u converge alors sa limite est un point fixe de f.

   (b) Montrer que pour tout entier n, $d(u_n, u_{n+1}) < k^n d(u_0, u_1)$. En déduire que pour tout couple (p, q) d'entiers strictement positifs, on a :

$$d(u_p, u_{p+q}) \leq d(u_0, u_1)\frac{k^p}{1-k}$$

   puis que u est une suite convergente.

3. Déduire des questions précédentes que toute application k-contractante possède un unique point fixe.

2.2 Distance de Hausdorff

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux éléments de $\mathcal{K}(\mathcal{E})$. On pose $h(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup(d(x, \mathcal{B}) | x \in \mathcal{A})$. La distance $H(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est alors définie par :

$$H(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup(h(\mathcal{A}, \mathcal{B}), h(\mathcal{B}, \mathcal{A})).$$

1. Donner une interprétation géométrique de H. Montrer en particulier que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{A},\ d(x, \mathcal{B}) \leq H(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \\ \forall y \in \mathcal{B},\ d(y, \mathcal{A}) \leq H(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \end{cases}$$

2. Montrer que H définit bien une distance sur $\mathcal{K}(\mathcal{E})$.
   Indication : pour montrer l'inégalité triangulaire, on partira de $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ valable pour tout triplet $(x, y, z) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ et l'on pourra montrer les résultats suivants :
   (i) $\forall (x, y, z) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{C},\ d(x, \mathcal{C}) \leq d(x, y) + d(y, z)$
   (ii) $\forall (x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B},\ d(x, \mathcal{C}) \leq d(x, y) + d(y, \mathcal{C}) \leq d(x, y) + H(\mathcal{B}, \mathcal{C})$
   (iii) $\forall x \in \mathcal{A},\ d(x, \mathcal{C}) \leq d(x, \mathcal{B}) + H(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \leq H(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + H(\mathcal{B}, \mathcal{C})$
   Puis on conclura.
3. Pour les amateurs de topologie : montrer que $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ muni de la distance de Hausdorff H est complet (*difficile* !).

2.3 *Iterative Function System* (IFS)

Les *IFS* constituent une généralisation de la méthode de construction de l'ensemble de Cantor : il s'agit en effet de l'application itérée d'une suite de transformation aboutissant à un ensemble fractal.

1. Considérons une application k-contractante $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$. On peut la prolonger en une application $\tilde{f}$ de $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ dans lui même par :

$$\begin{array}{rccl} \tilde{f}: & \mathcal{K}(\mathcal{E}) & \to & \mathcal{K}(\mathcal{E}) \\ & \mathcal{A} & \mapsto & \tilde{f}(\mathcal{A}) = \{f(x) | x \in \mathcal{A}\}. \end{array}$$

   (a) Pourquoi $\tilde{f}(\mathcal{A})$ ainsi défini appartient-il bien à $\mathcal{K}(\mathcal{E})$?

   (b) Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux compacts de $\mathcal{E}$.

      i. Soient $x \in \mathcal{A}$ et $y \in \mathcal{B}$. Montrer que $d(f(x), \tilde{f}(\mathcal{B})) \leq kd(x, y)$.

      ii. En déduire que pour tout x de $\mathcal{A}$, $d(f(x), \tilde{f}(\mathcal{B})) \leq kH(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ puis que $H(\tilde{f}(\mathcal{A}), \tilde{f}(\mathcal{B})) \leq kH(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

   (c) Soit $\mathcal{A}_p$ une suite d'éléments de $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{A}_0 & = & \mathcal{X}_0 \\ \mathcal{A}_{p+1} & = & \tilde{f}(\mathcal{A}_p) \quad p \geq 1, \end{array} \right.$$

   où $\mathcal{X}_0$ est un compact de $\mathcal{E}$.
   Montrer que $\mathcal{A}_p$ converge dans $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ vers une limite que l'on précisera.

2. On généralise le résultat suivant de la manière suivante : soient $f_{i=1...m}$, m applications $k_{i=1...m}$-contractantes classées de façon à avoir $k_1 \leq k_2 \leq ... \leq k_m$. On définit l'application $\tilde{F}$ de $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ dans lui même par :

$$\begin{array}{rccl} \tilde{F}: & \mathcal{K}(\mathcal{E}) & \to & \mathcal{K}(\mathcal{E}) \\ & \mathcal{A} & \mapsto & \tilde{F}(\mathcal{A}) = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} \tilde{f}_i(\mathcal{A}). \end{array}$$

   (a) Pourquoi $\tilde{F}(\mathcal{A})$ ainsi défini appartient-il bien à $\mathcal{K}(\mathcal{E})$?

   (b) Montrer que $\tilde{F}$ est k_m-contractante.

   (c) Soit $\mathcal{A}_p$ une suite d'éléments de $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{A}_0 & = & \mathcal{X}_0 \\ \mathcal{A}_{p+1} & = & \tilde{F}(\mathcal{A}_p) \quad p \geq 1, \end{array} \right.$$

   où $\mathcal{X}_0$ est un compact de $\mathcal{E}$.
   Montrer que $\mathcal{A}_p$ converge dans $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ vers un compact $\mathcal{A}_\infty$. Pourquoi peut-on qualifier $\mathcal{A}_\infty$ d'*auto-similaire* ?

2.4 Applications

1. Dans le cas $\mathcal{E} = \mathbb{R}$, comment choisir les f_i de façon à obtenir pour point fixe l'ensemble de Cantor (on pourra les chercher sous forme de fonctions affines).
2. Dans le cas où $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne, supposons que l'on utilise des transformations affines de la forme :

$$f_i(x) = a_i + g_i(x),$$

où $a_i \in \mathbb{R}^2$ et g_i est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
Si l'on se fixe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle les coordonnées de x sont notés x_1 et x_2, chaque f_i peut mettre sous la forme :

$$f_i(x) = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_i \cos(\phi_i) & -s_i \sin(\psi_i) \\ r_i \sin(\phi_i) & s_i \cos(\psi_i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que :

$$\begin{pmatrix} r_i \cos(\phi_i) & -s_i \sin(\psi_i) \\ r_i \sin(\phi_i) & s_i \cos(\psi_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\delta_i) & \sin(\delta_i) \\ \sin(\delta_i) & \cos(\delta_i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_i & 0 \\ 0 & s_i \end{pmatrix},$$

   avec $\theta_i = (\phi_i + \psi_i)/2$ et $\delta_i = (\phi_i - \psi_i)/2$. En déduire une interprétation géométrique des paramètres $(\alpha_i, \beta_i, r_i, s_i, \phi_i, \psi_i)$.
   On admettra dans la suite que si $\rho_i = \max(r_i, s_i)$ et $\rho_i \sqrt{1 + \sin(2|\psi_i - \phi_i|)/2} < 1$, alors f_i est contractante.

   (b) On choisit $m = 4$ et on prend les valeurs suivantes (les angles sont donnés en degrés) :

i	α_i	β_i	ϕ_i	ψ_i	r_i	s_i
1	0	1.6	-2.5	-2.5	0.85	0.85
2	0	1.6	49	49	0.3	0.34
3	0	0.44	120	-50	0.3	0.37
4	0	0	0	0	0	0.16

   Vérifier que les f_i sont contractantes et décrivez qualitativement l'allure de la limite de l'IFS (on pourra prendre pour condition initiale un carré).

A Rappels sur la topologie des espaces métriques

• Soit un espace $\mathcal{E}$. L'application $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ définit une distance sur $\mathcal{E}$ si elle satisfait les trois axiomes suivants :

1. $\forall (x, y) \in \mathcal{E}^2, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\forall (x, y) \in \mathcal{E}^2, \quad d(x, y) = d(y, x)$;
3. $\forall (x, y, z) \in \mathcal{E}^3, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

• Soit u une suite d'éléments de $\mathcal{E}$. u est une suite de *Cauchy* si elle satisfait la condition suivante :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N > 0 \text{ tq } \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p > N \Rightarrow d(u_p, u_{p+q}) < \epsilon.$$

$\mathcal{E}$ est dit complet si toutes les suites de Cauchy sont convergentes. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}$ est complet.
• Soit x un élément de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{E}$, on définit la distance de x à $\mathcal{A}$ par :

$$d(x, \mathcal{A}) = \inf_{y \in \mathcal{A}} \left(d(x, y) \right).$$

Si $\mathcal{A}$ est fermé, cet inf. est en fait un min.
• L'ensemble $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ des compacts de $\mathcal{E}$ est composé des ensembles fermés et bornés.