Superfluidité d'un gaz de Bose

M2 de physique quantique 2007-2008

Examen de mécanique quantique I

Y. Castin et A. Sinatra

Il est de notoriété publique qu'un gaz de Bose en interaction faible est superfluide à suffisamment basse température, comme le suggère le célèbre argument de Landau. Le but de ce sujet est de rendre cette affirmation quantitative, dans l'esprit des travaux d'Anthony Leggett, en considérant la réponse du système à une tentative de mise en mouvement. On pourra ainsi étudier en particulier la différence entre fraction non condensée et fraction normale, ainsi que l'effet d'une dimensionalité réduite.

Dans toute la suite, le gaz est composé d'un nombre bien défini N de bosons de masse m, non relativistes et sans spin. Le gaz est confiné dans la boîte $[0, L]^d$, où d est la dimension de l'espace. Il s'agit donc d'une boîte cubique en dimension trois, d'une boîte carrée en dimension deux. On impose des conditions aux limites périodiques de période L sur la fonction d'onde du système. Les bosons interagissent par un potentiel V dépendant seulement des coordonnées relatives des particules. Le Hamiltonien non perturbé du gaz est alors en première quantification :

$$H_0 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \tag{1}$$

où $\mathbf{p}_i$ est l'opérateur impulsion de la particule i et $\mathbf{r}_i$ est son opérateur position.

Il est conseillé de traiter les questions et les parties dans leur ordre d'apparition.

1 Définition quantitative de la fraction normale

L'objectif est d'obtenir une expression très générale pour la fraction normale f_n du gaz, c'est-à-dire le complémentaire à un de la fraction superfluide f_s du gaz, $f_s + f_n = 1$. On utilise pour cela la réponse du système à l'équilibre thermodynamique à l'excitation par un potentiel de 'touillage' $W(t)$ selon x, c'est-à-dire un potentiel dépendant du temps tentant de mettre le gaz en mouvement à la vitesse v selon l'axe des x.

1.1 Le potential de 'touillage'

On applique un potentiel qui brise l'invariance par translation selon l'axe des x et qui avance à la vitesse $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$, où $\mathbf{e}_x$ est le vecteur unitaire orientant l'axe des x :

$$W(t) = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{W}(\mathbf{r}_i - \mathbf{v}t). \tag{2}$$

On aura compris que la vitesse $\mathbf{v}$ n'est donc pas un opérateur mais un vecteur à composantes réelles.

a) Écrire l'équation de Schrödinger sur le vecteur d'état du système $|\psi(t)\rangle$ en présence de la perturbation, en termes des opérateurs H_0 et $W(t)$.

b) On introduit la transformation unitaire dépendant du temps

$$U(t) = e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{v}t/\hbar} \tag{3}$$

où l'on a introduit l'opérateur impulsion totale du gaz :

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i. \tag{4}$$

À l'issue de cette transformation unitaire, le vecteur d'état du système est

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle \equiv U(t)|\psi(t)\rangle. \tag{5}$$

Montrer que l'opérateur position de la particule j se transforme ainsi :

$$U(t)\mathbf{r}_j U^\dagger(t) = \mathbf{r}_j + \mathbf{v}t. \tag{6}$$

On rappelle les relations de commutation canoniques $[p_{j,\alpha}, r_{j,\beta}] = -i\hbar\delta_{\alpha,\beta}$ entre les composantes de l'impulsion et de la position selon les axes α et β respectivement, ainsi que la représentation en point de vue position de l'opérateur impulsion, $p_{j,\alpha} = -i\hbar\partial_{r_{j,\alpha}}$.

c) Écrire l'équation de Schrödinger satisfaite par le vecteur d'état transformé $|\tilde{\psi}\rangle$. En déduire le nouveau Hamiltonien $\tilde{H}$ du système, que l'on exprimera en fonction de H_0, $W(t=0)$, $\mathbf{P}$ et $\mathbf{v}$.

d) Au vu d'une propriété importante de $\tilde{H}$, quel est l'intérêt d'avoir effectué cette transformation unitaire ?

1.2 La réponse du système

On suppose que le système, avant application de la perturbation, était à l'équilibre thermodynamique à la température T dans l'ensemble canonique, donc avec l'opérateur densité

$$\sigma_0 = \frac{1}{Z_0} e^{-\beta H_0} \quad \text{avec} \quad Z_0 = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H_0} \tag{7}$$

où l'on a posé comme d'habitude $\beta = 1/(k_B T)$. On suppose de même que le système, en présence de la perturbation et après la transformation unitaire $U(t)$, atteint aux temps longs un état d'équilibre thermodynamique à la même température T,

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{Z} e^{-\beta\tilde{H}} \quad \text{avec} \quad Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta\tilde{H}}. \tag{8}$$

a) Justifier le fait que l'impulsion totale a une moyenne nulle dans l'état thermique non perturbé σ_0. On utilisera le fait que H_0 est représenté en point de vue position par un opérateur différentiel réel donc que ses fonctions d'onde propres peuvent être prises réelles. À quelle symétrie fondamentale de H_0 cette propriété vous semble-t-elle correspondre ?

b) Les propriétés de la question précédente sont-elles *a priori* vraies en présence de la perturbation, c'est-à-dire pour l'état thermique $\tilde{\sigma}$? On distinguera le cas $v = 0$ et $v \neq 0$.

c) On définit la fraction normale comme suit :

$$f_n = \lim_{v \to 0} \lim_{\mathcal{W} \to 0} \frac{\langle P_x \rangle}{Nmv} \tag{9}$$

où $\langle P_x \rangle$ est la moyenne dans l'état thermalisé en présence de la perturbation :

$$\langle P_x \rangle = \mathrm{Tr}[P_x \tilde{\sigma}]. \tag{10}$$

Justifier physiquement cette définition. On considérera pour cela le cas limite d'un fluide ordinaire (que vaut alors $\langle P_x \rangle$?), puis le cas limite d'un fluide totalement superfluide (que vaut alors $\langle P_x \rangle$?).

d) Après avoir fait tendre $\mathcal{W}$ vers zéro, développer $\tilde{\sigma}$ au premier ordre inclus en v, en justifiant les opérations effectuées. En déduire que

$$f_n = \frac{\langle P_x^2 \rangle_0}{Nmk_BT} \tag{11}$$

où la moyenne est prise cette fois dans l'état thermique non perturbé :

$$\langle P_x^2 \rangle_0 = \mathrm{Tr}[P_x^2 \sigma_0]. \tag{12}$$

Dans toute la suite, le potentiel de touillage n'apparaîtra plus et l'on aura $v = 0$, si bien que le Hamiltonien du système sera simplement H_0.

2 Calcul dans l'approximation de Bogoliubov pour un condensat au repos

Dans cette section, on suppose que le gaz est en interaction assez faible et se trouve à suffisamment basse température pour qu'on puisse utiliser la théorie de Bogoliubov pour calculer la fraction normale du gaz. On effectue d'abord un calcul général en dimension quelconque d, puis on l'applique ensuite aux cas particuliers $d = 3$, puis $d = 1$.

Le Hamiltonien du système est H_0 donné par (1). Comme dans le cours, on suppose que le potentiel d'interaction V entre les particules est un potentiel de contact

$$V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = g\delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \tag{13}$$

où δ est la distribution de Dirac en dimension d et $g > 0$ est la constante de couplage en dimension d.

On ne s'inquiétera pas du fait qu'il n'y ait pas de condensat au sens strict dans la limite thermodynamique pour $d \leq 2$: même si la théorie de Bogoliubov n'est *a priori* pas valable dans ce cas, elle donne *a posteriori* des résultats sensés pour la fraction normale et que l'on peut justifier par une théorie plus générale.

2.1 Expression de l'opérateur impulsion totale

On suppose donc qu'un condensat est présent dans le mode de vecteur d'onde $\mathbf{k}_0 = \mathbf{0}$ de la boîte.

a) Rappeler quelle est, dans ce cas, la fonction d'onde du condensat $\phi(\mathbf{r})$, correctement normalisée.

b) Écrire l'équation de Gross-Pitaevskii indépendante du temps, et vérifier que $\phi(\mathbf{r})$ donnée à la question précédente est solution de l'équation avec un potentiel chimique μ_0 que l'on exprimera en fonction de g et de la densité totale $\rho = N/L^d$.

c) On rappelle que, dans la théorie de Bogoliubov vue en cours, apparaît un champ

$$\Lambda(\mathbf{r}) = e^{-i\theta}\psi_\perp(\mathbf{r}) \tag{14}$$

où l'opérateur $e^{i\theta}$, supposé unitaire, donne la phase de l'opérateur annihilation d'une particule dans le mode du condensat, et $\psi_\perp(\mathbf{r})$ est l'opérateur champ projeté orthogonalement au mode du condensat. Compte tenu de la géométrie du système, exprimer $\psi_\perp(\mathbf{r})$ très simplement comme une somme sur des vecteurs d'onde $\mathbf{k}$ que l'on précisera, en faisant intervenir les opérateurs $a_\mathbf{k}$ annihilant une particule dans l'onde plane de vecteur d'onde $\mathbf{k}$.

d) On rappelle la décomposition du champ Λ sur les modes de Bogoliubov :

$$\Lambda(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} u_\mathbf{k}(\mathbf{r})b_\mathbf{k} + v_\mathbf{k}^*(\mathbf{r})b_\mathbf{k}^\dagger, \tag{15}$$

où les modes $(u_\mathbf{k}, v_\mathbf{k})$ appartiennent à la famille $\mathcal{F}_+$ vue en cours. Compte tenu de la géométrie *particulière* du système, les $\mathbf{k}$ sont des vecteurs d'onde. Expliquer pourquoi on exclut $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ de leur ensemble de variation.

e) On rappelle l'expression des modes de Bogoliubov dans le cas présent :

$$u_\mathbf{k}(\mathbf{r}) = U_k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{L^{d/2}} \tag{16}$$

$$v_\mathbf{k}(\mathbf{r}) = V_k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{L^{d/2}}, \tag{17}$$

ainsi que la valeur propre associée (de l'opérateur $\mathcal{L}$ introduit en cours) :

$$\epsilon_k^0 = [E_k(E_k + 2\mu_0)]^{1/2}, \quad \text{avec} \quad E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \tag{18}$$

On n'aura pas besoin de l'expression explicite des fonctions U_k et V_k mais on notera qu'elles sont réelles et dépendent seulement du module $k = |\mathbf{k}|$ du vecteur d'onde. Rappeler quelle contrainte sur U_k et V_k impose la normalisation correcte du mode de Bogoliubov considéré, sachant qu'il appartient à la famille $\mathcal{F}_+$.

f) Exprimer l'opérateur impulsion totale selon x, P_x, en seconde quantification, dans l'espace des vecteurs d'onde donc en termes des opérateurs $a_{\mathbf{k}}$ et $a_{\mathbf{k}}^\dagger$.

g) À l'aide des questions précédentes, exprimer $e^{-i\theta} a_{\mathbf{k}}$, pour $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$, en fonction des opérateurs b et $b^\dagger$.

h) Montrer que la quantité $k_x b_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}$ est une fonction impaire de $\mathbf{k}$. En déduire que la somme sur $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ de cette quantité est nulle.

i) Montrer que l'opérateur impulsion totale suivant x vaut simplement

$$P_x = \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} \hbar k_x b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}. \tag{19}$$

2.2 Expression littérale de la fraction normale

On suppose que le gaz est à l'équilibre thermodynamique à la température T. Dans l'expression exacte (7), on approxime H_0 par le Hamiltonien de Bogoliubov dont on rappelle la forme normale :

$$H_{\mathrm{Bog}} = E[\phi] - \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} \epsilon_k^0 V_k^2 + \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} \epsilon_k^0 b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}. \tag{20}$$

La fonctionnelle $E[\phi]$ est la fonctionnelle énergie de Gross-Pitaevskii :

$$E[\phi] = N \int d^d r \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\mathbf{grad}\, \phi|^2 + \frac{g}{2} N |\phi|^4 \right]. \tag{21}$$

a) Peut-on alors utiliser le théorème de Wick pour calculer les valeurs moyennes de combinaisons de b et de $b^\dagger$? Justifier la réponse.

b) Calculer la fraction normale (11). On l'exprimera comme une somme de termes faisant intervenir en particulier les nombres d'occupation

$$n_k^0 = f(\epsilon_k^0) \quad \text{avec} \quad f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta\epsilon} - 1}. \tag{22}$$

c) Que devient cette expression de f_n à la limite thermodynamique, $N \to \infty$ avec $N/L^d = \rho$ =constante ?

2.3 Analyse du résultat en dimension trois

On utilise le résultat de la question 2.2.c, à la limite thermodynamique donc, pour obtenir des expressions asymptotiques de la fraction normale f_n à basse température puis à haute température, dans le cas d'une dimension spatiale $d = 3$.

a) On considère le cas $k_B T \ll \mu_0$. Montrer que l'on peut alors approximer le spectre de Bogoliubov (18) par $\epsilon_k^0 \simeq \hbar c k$ dans le calcul de f_n. Quelle est la signification physique de c ? Quelle est son expression en fonction de μ_0 et m ?

b) Sous cette approximation de linéarisation du spectre, en effectuant un changement de variable sur k que l'on précisera, obtenir une expression explicite de la densité normale du gaz, $\rho_n = \rho f_n$, en fonction de $\hbar/(mc)$ et $k_B T/(\hbar c)$. On donne la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(e^x - 1)(1 - e^{-x})} = \frac{4\pi^4}{15}. \tag{23}$$

c) En déduire que le gaz devient entièrement superfluide dans la limite d'une température nulle. La densité superfluide coïncide-t-elle avec la densité du condensat dans cette limite ?

d) On considère maintenant le cas $k_B T \gg \mu_0$, mais on reste bien sûr dans le régime fortement dégénéré. On approxime alors le spectre de Bogoliubov par $\epsilon_k^0 \simeq \hbar^2 k^2/(2m)$. Vérifier que, *sous cette approximation*, l'intégrand dans l'expression intégrale de f_n s'exprime simplement en fonction d'une puissance de k et de $\partial_k n_k^0$. Par intégration par parties, en déduire que ρ_n ainsi approximé coïncide avec la densité non condensée du gaz parfait de température T.

2.4 Analyse du résultat en dimension un

On utilise le résultat de la question 2.2.c, à la limite thermodynamique donc, pour obtenir des expressions asymptotiques de la fraction normale f_n à basse température puis à haute température, dans le cas d'une dimension spatiale $d = 1$.

a) On commence par le cas $k_B T \ll \mu_0$, et l'on reproduit la démarche suivie en dimension trois, en linéarisant le spectre de Bogoliubov à faible k. En déduire une expression approchée de la densité normale $\rho_n = \rho f_n$ en fonction de $\hbar/(mc)$ et $k_B T/(\hbar c)$. On donne la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(e^x - 1)(1 - e^{-x})} = \frac{\pi^2}{3}. \tag{24}$$

Le gaz devient-il entièrement superfluide à la limite $T \to 0$?

b) On considère maintenant le cas de haute température $k_B T \gg \mu_0$. Montrer que l'approximation $\epsilon_k^0 \simeq \hbar^2 k^2/(2m)$ ne peut plus être utilisée.

c) On utilise plutôt l'approximation de n_k^0 obtenue en développant la fonction $f(\epsilon)$ dans (22) au premier ordre non nul en β. Donner l'approximation correspondante sur n_k^0. Montrer qu'elle implique $n_k^0 \gg 1$.

d) Montrer qu'on aboutit alors à une intégrale sur k que l'on sait calculer, ce qui conduit à une expression très simple de la densité normale en fonction de $k_BT/(\hbar c)$. On rappelle la valeur de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi. \tag{25}$$

e) L'intégrale précedente sur k converge sur un intervalle de largeur k_{larg} que l'on précisera. A-t-on $n_{k_{\text{larg}}} \gg 1$? L'approximation utilisée à la question c précédente est-elle justifiée ?

3 Extension au cas de condensats en mouvement

Dans cette section, on revisite les calculs de la section précédente en incluant la possibilité que le condensat soit spontanément en mouvement à l'équilibre thermique.

3.1 Modes de Bogoliubov d'un condensat en mouvement

a) On suppose que la fonction d'onde du condensat $\phi(\mathbf{r})$ est une onde plane de vecteur d'onde $\mathbf{k}_0 \neq \mathbf{0}$ correctement normalisée. Quelles sont les valeurs possibles de $\mathbf{k}_0$? Montrer que $\phi(\mathbf{r})$ est alors une solution de l'équation de Gross-Pitaevskii, avec un potentiel chimique μ que l'on exprimera en fonction de $\hbar$, m, $\mathbf{k}_0$, ρ et g.

b) On rappelle l'expression de l'opérateur $\mathcal{L}$ intervenant dans la diagonalisation du Hamiltonien de Bogoliubov, simplifiée dans le cadre de la géométrie présente :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + 2\rho g - \mu & \rho g e^{2i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}} \\ -\rho g e^{-2i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}} & -\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + 2\rho g - \mu\right] \end{pmatrix} \tag{26}$$

où Δ est le laplacien en dimension d. On a omis pour simplifier l'écriture des projecteurs Q et Q^* assurant que les fonctions propres $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ et $v_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ sont respectivement orthogonales à la fonction d'onde $\phi(\mathbf{r})$ et à $\phi^*(\mathbf{r})$. On utilise l'ansatz suivant pour diagonaliser $\mathcal{L}$:

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \tilde{U}_{\mathbf{k}} \frac{e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}_0)\cdot\mathbf{r}}}{L^{d/2}} \tag{27}$$

$$v_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \tilde{V}_{\mathbf{k}} \frac{e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\cdot\mathbf{r}}}{L^{d/2}}. \tag{28}$$

On notera la différence de signe devant $\mathbf{k}_0$ entre (27) et (28). Expliquer pourquoi on doit avoir $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$. Montrer que les amplitudes des vecteurs propres de la famille $\mathcal{F}_+$ ont exactement la même expression que dans le cas d'un condensat au repos, c'est-à-dire

$$\tilde{U}_{\mathbf{k}} = U_k \tag{29}$$

$$\tilde{V}_{\mathbf{k}} = V_k, \tag{30}$$

mais que l'expression des valeurs propres est modifiée comme suit :

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \epsilon_k^0 + \hbar \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 \tag{31}$$

où

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\hbar \mathbf{k}_0}{m} \tag{32}$$

est la vitesse du condensat.

c) Y a-t-il stabilité dynamique du système ?

d) À partir de (31), comment voir s'il y a stabilité thermodynamique du système ?

e) Montrer que, dans la limite thermodynamique, il y a stabilité thermodynamique si et seulement si la vitesse du condensat $\mathbf{v}_0$ est inférieure en module à une valeur limite que l'on précisera. On pourra commencer par minimiser $\epsilon_{\mathbf{k}}$ sur la direction de $\mathbf{k}$ à module k fixé. Dans la suite, on se limitera à des condensats en mouvement obéissant à la contrainte obtenue.

3.2 Valeur moyenne de P_x et P_x^2 pour un condensat en mouvement

a) Montrer, par un changement de variable, que l'opérateur impulsion totale selon x peut s'écrire :

$$P_x = \hbar k_{0,x} \hat{N} + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \hbar k_x a^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_0} a_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_0} \tag{33}$$

où k_x est la composante suivant x du vecteur $\mathbf{k}$ et $\hat{N}$ l'opérateur nombre total de particules.

b) À l'aide de la décomposition modale (15) et de la forme des modes de Bogoliubov (27) et (28), exprimer l'opérateur $e^{-i\theta} a_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_0}$ en fonction de U_k, V_k, $b_{\mathbf{k}}$ et $b^\dagger_{-\mathbf{k}}$, pour $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$.

c) En déduire l'expression de P_x:

$$P_x = \hbar k_{0,x} \hat{N} + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \hbar k_x b^\dagger_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}. \tag{34}$$

d) Calculer la valeur moyenne de P_x sur la distribution thermique à la température T des modes de Bogoliubov du condensat en mouvement. On introduira les nombres d'occupation $n_{\mathbf{k}}$ qui dépendent de la vitesse du condensat puisque $\epsilon_{\mathbf{k}}$ en dépend, voir (31).

e) On suppose maintenant que $v_0 \ll c$, où c est la vitesse introduite à la question 2.3.a. Dans l'expression de $\langle P_x \rangle$ obtenue à la question précédente, développer $n_{\mathbf{k}}$ au premier ordre inclus en v_0. On utilisera la relation

$$f'(\epsilon_k^0) = -\beta n_k^0 (1 + n_k^0) \tag{35}$$

où la fonction $f(\epsilon)$ est définie par (22).

f) On introduit la quantité

$$N_s = (1 - f_n)N. \tag{36}$$

Quelle est sa signification physique ? Exprimer le résultat de la question précédente pour $\langle P_x \rangle$ en termes de N_s et $\hbar k_{0,x}$, et en donner une interprétation physique. On aura besoin pour cela du résultat de la question 2.2.b.

g) Calculer maintenant $\langle P_x^2 \rangle$. Puis développer les nombres d'occupation $n_{\mathbf{k}}$ dans le résultat au premier ordre inclus en v_0, en négligeant les termes en $O(v_0^2)$. En revanche, on gardera les termes en $O(v_0^2)$ apparaissant par ailleurs dans $\langle P_x^2 \rangle$.

h) Comme la théorie de Bogoliubov est perturbative, on s'autorise à traiter f_n comme un infiniment petit du premier ordre. En négligeant des termes en $O(f_n^2)$, montrer que le résultat de la question précédente peut s'écrire

$$\langle P_x^2 \rangle = N m k_B T f_n + N_s^2 \hbar^2 k_{0,x}^2. \tag{37}$$

3.3 Un mélange statistique de condensats en mouvement

Dans l'approximation de Bogoliubov dite "multi-vallée", on approxime le véritable opérateur densité du gaz à l'équilibre thermique par un *mélange statistique* de condensats en mouvement, chaque condensat en mouvement étant habillé par ses modes de Bogoliubov à l'équilibre thermique. Pour obtenir la véritable fraction normale, il reste ici à déterminer le poids statistique du condensat en mouvement de vecteur d'onde $\mathbf{k}_0$, puis à moyenner (37) avec ce poids. Or le poids statistique du condensat de vecteur d'onde $\mathbf{k}_0$ est donné par la fonction de partition du Hamiltonien de Bogoliubov correspondant,

$$Z_{\mathbf{k}_0} = \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta H_{\mathrm{Bog}}}\right] \tag{38}$$

où l'on rappelle la forme normale du Hamiltonien de Bogoliubov :

$$H_{\mathrm{Bog}} = E[\phi] - \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} \epsilon_k V_k^2 + \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} \epsilon_k b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}, \tag{39}$$

où la fonctionnelle énergie de Gross-Pitaevskii est donnée par (21).

a) On rappelle que la fonction d'onde du condensat est une onde plane de vecteur d'onde $\mathbf{k}_0$ correctement normalisée. Calculer l'énergie de Gross-Pitaevskii $E[\phi]$ du condensat, en fonction de N, $\hbar$, $\mathbf{k}_0$, m, la constante de couplage g et la densité ρ.

b) Montrer que la correction de Bogoliubov à l'énergie du fondamental de H_{Bog} ne dépend pas du vecteur d'onde $\mathbf{k}_0$.

c) Que vaut la fonction de partition à la température T d'un Hamiltonien à un mode $\mathcal{H} = \epsilon b^\dagger b$, où b et $b^\dagger$ obéissent à des relations de commutation bosoniques ? On pourra faire le calcul dans la base de Fock.

d) En déduire la valeur du *rapport* des fonctions de partition d'un condensat en mouvement et du condensat au repos :

$$\frac{Z_{\mathbf{k}_0}}{Z_{\mathbf{0}}} = e^{-\beta N \hbar^2 k_0^2/(2m)} \exp\left\{-\sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} \ln\left[1 + n_k^0\left(1 - e^{-\beta\hbar\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_0}\right)\right]\right\} \tag{40}$$

e) Développer l'expression *entre accolades* $\{\ldots\}$ dans (40) au second ordre inclus en v_0. On rappelle que $\ln(1+x) = x - x^2/2 + O(x^3)$ lorsque $x \to 0$. Vérifier que la contribution du premier ordre en v_0 s'annule après sommation sur $\mathbf{k}$, et que l'inclusion de la contribution du second ordre conduit à

$$\frac{Z_{\mathbf{k}_0}}{Z_{\mathbf{0}}} = e^{-\beta N_s \hbar^2 k_0^2/(2m)}, \tag{41}$$

en utilisant le résultat de la question 2.2.b et la définition (36).

f) On passe maintenant à la limite thermodynamique, $N \to +\infty$ à $\rho = N/L^d$ fixé. Montrer très simplement que, en dimension trois, le poids statistique des condensats en mouvement est négligeable dans cette limite. Ceci justifie le fait que la possibilité de condensats 'spontanément' en mouvement à l'équilibre thermodynamique n'est jamais mentionnée en dimension trois.

g) Le raisonnement précédent s'applique-t-il en dimension deux ? En dimension un ? Justifier le fait que l'expression de 'super-courants' est banale en dimension un.

h) On se place maintenant en dimension un. Moyenner le résultat (37) sur le poids statistique (41). On se place à la limite thermodynamique donc on pourra remplacer la somme sur $\mathbf{k}_0$ par une intégrale. On rappelle que

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^2 e^{-x^2/(2\sigma^2)}}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2/(2\sigma^2)}} = \sigma^2 \tag{42}$$

pour $\sigma > 0$. En déduire la 'vraie' valeur de $\langle P_x^2 \rangle$, et finalement la 'vraie' valeur de la fraction normale en dimension un, selon la définition (9). On doit trouver un résultat on ne peut plus simple...