Examen de Mécanique quantique de rattrapage

M2 de physique quantique 2012-2013

28 février 2013 – Y. Castin et C. Trefzger

Pour chaque exercice, veuillez écrire votre réponse dans le cadre prévu à cet effet. Aucune justification ni intermédiaire de calcul n'est demandé. Les exercices sont tous indépendants ; chacun rapporte 3 points en cas de réponse exacte, 0 point sinon.

1. On considère quatre bosons indiscernables pouvant occuper deux modes orthonormaux $|\alpha\rangle$ et $|\beta\rangle$. Quel est le vecteur d'état $|\Psi\rangle$ représentant l'état à trois particules dans le mode $|\alpha\rangle$ et une particule dans le mode $|\beta\rangle$? On donnera $|\Psi\rangle$ en première quantification sous forme réduite (avec un nombre minimal de termes) et normalisée. Dans les produits tensoriels, on pourra omettre le signe $\otimes$ par concision.

   $|\Psi\rangle =$

2. On considère un oscillateur harmonique quantique à une dimension, donc de Hamiltonien $H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$. On suppose que le système est à l'équilibre thermique à la température T. On pose $k = (2m\omega/\hbar)^{1/2}$ et $\theta = \mathrm{th}[\hbar\omega/(2k_B T)]$. Donner, en fonction de θ, la valeur moyenne de l'opérateur $\exp(ikX)$ dans l'état du système.

   $\langle \exp(ikX) \rangle =$

3. On considère un degré de liberté a d'un champ bosonique quantique (avec $[a, a^\dagger] = 1$), ayant une dynamique non linéaire de Hamiltonien $H = \frac{\hbar\chi}{2}(a^\dagger a)^2$. Sachant que l'état initial est l'état cohérent de Glauber $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$, où $|n\rangle$ est l'état de Fock à n bosons, donner la valeur minimale (par minimisation sur le temps $t \geq 0$) du module $|\langle a(t)\rangle|$, où $a(t)$ est l'opérateur a en point de vue de Heisenberg.

   $\inf_t |\langle a(t)\rangle| =$

4. On considère, en dimension trois, un gaz de Bose spatialement homogène sans spin, avec des interactions faibles et répulsives, à l'équilibre thermique dans un régime de condensat presque pur. À l'aide de la théorie de Bogoliubov, déterminer la fonction de cohérence du premier ordre $g_1(\mathbf{r}) = \langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{0})\rangle$, où $\hat{\psi}$ est l'opérateur champ bosonique habituel. On donnera $g_1(\mathbf{r})$ en fonction des amplitudes réelles U_k et V_k et des nombres d'occupation n_k des modes de Bogoliubov de vecteurs d'onde $\mathbf{k}$, ainsi

que de la densité totale ρ du gaz. De plus, on se placera à la limite thermodynamique (ce qui introduira une intégrale sur les vecteurs d'onde $\mathbf{k}$).

$g_1(\mathbf{r}) =$

5. En dimension trois, on fait diffuser une particule quantique de masse μ sur un potentiel en puits carré, $V(r) = -\frac{\hbar^2 k_0^2}{2\mu}$ pour $r < b$, $V(r) = 0$ si $r > b$. Donner la longueur de diffusion a dans l'onde s en fonction de b et de k_0.

$a =$

6. En dimension trois, on considère une particule discernable de masse m couplée à un gaz parfait spatialement homogène de fermions sans spin de même masse m et de densité ρ. L'interaction entre l'impureté et les fermions est décrite par le modèle sur réseau cubique de pas b vu en cours, avec une constante de couplage nue g_0 reliée à la constante de couplage effective $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ par $g_0 = g/(1-gI)$, avec $I = \int_{\mathrm{PZB}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_\mathbf{k}}$. Ici $E_\mathbf{k} = \hbar^2 k^2/(2m)$ et "PZB" est la première zone de Brillouin $[-\pi/b, \pi/b[^3$. On note aussi "MF" la mer de Fermi, c'est-à-dire la boule centrée sur l'origine et de rayon le vecteur d'onde de Fermi k_F. En traitant l'interaction au second ordre de la théorie des perturbations, on a trouvé pour la correction à l'énergie de l'état fondamental :

$$\Delta E = \int_{\mathrm{MF}} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left[g_0 - g_0^2 \int_{\mathrm{PZB}\setminus\mathrm{MF}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_\mathbf{k} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - E_\mathbf{q}} + O(g_0^3) \right]$$

qui devient, à la limite $k_F b \to 0$ après une astuce plus-moins appropriée :

$$\Delta E = \rho g(1+\eta k_F a) - g^2 \int_{\mathrm{MF}} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3\setminus\mathrm{MF}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{E_\mathbf{k} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - E_\mathbf{q}} - \frac{1}{2E_\mathbf{k}} \right) + O(g^3)$$

Donner la valeur de la constante η.

$\eta =$

7. On considère un degré de liberté a d'un champ bosonique quantique ($[a, a^\dagger] = 1$). Ce système S est couplé à un réservoir R de température nulle, si bien que son opérateur densité ρ_S évolue selon une équation pilote de la forme de Lindblad, caractérisée par le Hamiltonien hermitien $H_S = \hbar\omega a^\dagger a$, $\omega > 0$, et par l'unique opérateur de saut $C = \gamma^{1/2} a$. Le système S est préparé dans l'état fondamental de H_S à l'instant zéro. En utilisant le théorème de régression quantique, calculer à l'instant $t \geq 0$ la fonction de corrélation $\langle a(t) a^\dagger(0) \rangle$, où $a(t)$ est l'opérateur a en point de vue de Heisenberg pour l'évolution hamiltonienne de l'ensemble $S + R$.

$\langle a(t) a^\dagger(0) \rangle =$