Évolution dissipative non linéaire d'un état cohérent

DEA de physique quantique

Examen de mécanique quantique 2001

On considère un modèle de champ quantique bosonique à un mode de hamiltonien

$$H = \hbar\omega_0 a^\dagger a + \frac{\hbar\chi}{2} a^\dagger a^\dagger a a \tag{1}$$

où a est l'opérateur d'annihilation d'une particule dans l'unique mode considéré et les quantités ω_0 et χ sont deux constantes, que l'on suppose positives pour simplifier. Dans les parties 1 et 3 le champ a une évolution purement hamiltonien décrite par H. Dans la partie 2 le champ subit de plus des pertes et son opérateur densité ρ évolue selon l'équation pilote

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] + \gamma a \rho a^\dagger - \frac{\gamma}{2}\{a^\dagger a, \rho\} \tag{2}$$

où γ est une constante positive, $[A, B]$ représente le commutateur $AB - BA$ de deux opérateurs A, B et $\{A, B\}$ représente l'anticommutateur $AB + BA$.

Dans tout le problème, on suppose que le champ est initialement dans un état cohérent de Glauber $|\alpha\rangle$ dont on rappelle la définition :

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle \tag{3}$$

où α est un nombre complexe et $|0\rangle$ représente le champ dans l'état vide. On rappelle également que $|\alpha\rangle$ est le vecteur propre de a avec la valeur propre α.

L'objectif du problème est d'étudier l'évolution de la moyenne $\langle a\rangle(t)$ prise dans l'état du champ à l'instant t. Il est conseillé de traiter les questions dans leur ordre d'apparition. Une grande importance sera accordée à la discussion physique des différents résultats obtenus.

1 Évolution sans pertes

On se place ici dans le cas $\gamma = 0$.

a) Donner un exemple de situation physique bien décrite par le présent modèle de hamiltonien H défini par (1). Préciser en particulier la signification physique des paramètres ω_0 et χ.

b) Montrer que, par une transformation unitaire à préciser, l'on peut faire disparaître du hamiltonien le terme proportionnel à ω_0. On suppose donc dans toute la suite que $\omega_0 = 0$.

c) On se place, dans cette question seulement, en point de vue de Heisenberg. Écrire l'équation du mouvement pour l'opérateur $a(t)$. Montrer que $a^\dagger a$ est une constante du mouvement, c'est-à-dire que

$$a^\dagger(t)a(t) = a^\dagger(0)a(0) = a^\dagger a. \tag{4}$$

Intégrer alors l'équation sur $a(t)$ et exprimer $a(t)$ en fonction de a, $a^\dagger$, χ et t.

d) Rappeler le développement de l'état cohérent $|\alpha\rangle$ sur la base des états de Fock $|n\rangle$, n entier positif ou nul. À l'aide du résultat de la question précédente, en déduire la moyenne du champ $\langle a\rangle$ à l'instant t explicitement en fonction de α, de χ et de t.

e) Étudier l'évolution temporelle du module $|\langle a\rangle(t)|$ dans le cas $|\alpha|^2 \gg 1$, et faire une figure. Préciser en particulier l'échelle de temps avec laquelle le champ se brouille. On note t_R l'instant du premier maximum de $|\langle a\rangle(t)|$ à $t > 0$. Exprimer t_R en fonction de χ.

f) Quelle est la valeur de $\langle a\rangle(t_R)$? En déduire sans calcul supplémentaire l'état du champ $|\psi(t_R)\rangle$ à l'instant $t = t_R$. On pourra pour cela déterminer la valeur moyenne de l'opérateur $(a^\dagger - \alpha^*)(a - \alpha)$ à l'instant $t = t_R$.

2 Évolution avec pertes

Dans cette partie on considère le cas $\gamma > 0$.

2.1 Nombre moyen de quanta

a) On introduit le nombre moyen de quanta dans le mode du champ :

$$N(t) = \mathrm{Tr}[a^\dagger a \rho(t)] \tag{5}$$

où l'opérateur densité du champ $\rho(t)$ évolue selon l'équation pilote (2). Écrire explicitement dN/dt en remplaçant $d\rho/dt$ par sa valeur.

b) En utilisant l'invariance par permutation circulaire de la trace d'un produit d'opérateurs, mettre dN/dt sous la forme

$$\frac{dN}{dt}(t) = \mathrm{Tr}\left[X\rho(t)\right] \tag{6}$$

où l'opérateur X ne dépend pas du temps.

c) En effectuant toutes les simplifications dans X rendues possibles par les relations de commutation bosoniques du champ, aboutir à l'équation fermée

$$\frac{dN}{dt}(t) = -\gamma N(t). \tag{7}$$

d) En déduire $N(t)$ en fonction de γ, t et $|\alpha|^2$. Donner aussi le nombre de quanta perdus en fonction du temps écoulé.

2.2 Fonction d'onde Monte-Carlo en l'absence de saut

a) Montrer que l'équation pilote (2) est de la forme de Lindblad. Préciser l'opérateur de saut C associé ainsi que le hamiltonien effectif non hermitien H_{eff}. Dans toute la suite on adopte l'approche des fonctions d'onde Monte-Carlo pour étudier l'évolution temporelle du champ.

b) On suppose que la fonction d'onde Monte-Carlo n'a subi aucun saut quantique dans l'intervalle de temps $[0, t]$. On appelle $|\psi_0(t)\rangle$ le vecteur d'état du champ correspondant. On rappelle alors que

$$|\psi_0(t)\rangle = \mathcal{N}_0 e^{-iH_{\text{eff}}t/\hbar}|\alpha\rangle \tag{8}$$

où $\mathcal{N}_0$ est un facteur de normalisation et où l'on a pris en compte l'état initial du champ. Calculer explicitement $|\psi_0(t)\rangle$ dans le cas particulier $\chi = 0$ et montrer que c'est un état cohérent de Glauber avec une amplitude $\alpha_0(t)$ que l'on précisera.

c) On suppose désormais que $\chi > 0$. Montrer que la partie hermitienne et la partie anti-hermitienne de H_{eff} commutent.

d) Montrer que

$$|\psi_0(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\alpha_0(t)\rangle. \tag{9}$$

d) À l'aide des résultats de la partie 1, obtenir sans calcul la valeur moyenne de a en l'absence de saut, $\langle a\rangle_0(t) = \langle\psi_0(t)|a|\psi_0(t)\rangle$. Vérifier en particulier qu'à l'instant t_R :

$$\langle a\rangle_0(t_R) = \alpha e^{-\gamma t_R/2}. \tag{10}$$

e) On se place dans le régime $\gamma t_R \ll 1$. Au vu du résultat précédent, faut-il s'inquiéter sur la persistance de la résurgence de phase du champ à $t = t_R$ en présence de pertes ?

2.3 Fonction d'onde Monte-Carlo ayant subi un seul saut

a) On suppose que la fonction d'onde Monte-Carlo a subi un seul saut dans l'intervalle de temps $[0, t]$. On appelle t_1 l'instant de ce saut et on note le vecteur d'état à l'instant t $|\psi_{1,t_1}(t)\rangle$. Exprimer $|\psi_{1,t_1}(t)\rangle$ par l'action sur $|\alpha\rangle$ d'opérateurs faisant intervenir H_{eff}, C, t_1 et $t - t_1$.

b) On établit dans cette question un résultat général utile pour la suite. Soit $f(z)$ une fonction de la variable complexe z développable en série entière. Rappeler la définition de l'opérateur $f(a^\dagger a)$. Montrer que

$$a\, f(a^\dagger a) = f(a^\dagger a + 1)\, a. \tag{11}$$

c) Montrer que H_{eff} est une fonction de $a^\dagger a$ que l'on précisera. Utiliser alors (11) pour déplacer l'opérateur de saut C dans l'expression de $|\psi_{1,t_1}(t)\rangle$ et faire apparaître ainsi $C|\alpha\rangle$.

d) En déduire l'identité remarquable

$$|\psi_{1,t_1}(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\alpha_{1,t_1}(t)\rangle \tag{12}$$

où l'amplitude d'état cohérent $\alpha_{1,t_1}(t)$ est une fonction de t que l'on précisera en termes de t_1, χ et γ.

e) À l'aide des résultats de la partie 1 montrer finalement que

$$\langle a\rangle_{1,t_1}(t_R) = \alpha e^{-\gamma t_R/2} e^{-i\chi t_1}. \tag{13}$$

f) On se place dans le régime $\gamma t_R \ll 1$. Le résultat précédent fait-il craindre un effet néfaste des pertes sur la résurgence du champ à $t = t_R$?

2.4 Fonction d'onde Monte-Carlo pour un nombre arbitraire de sauts

On considère à l'instant t_R une fonction d'onde Monte-Carlo $|\psi_{n,t_1,\ldots,t_n}\rangle$ ayant subi dans l'intervalle de temps $[0, t_R]$ exactement n sauts, aux instants $t_1, \ldots, t_n$ rangés par ordre temporel croissant. On admet le résultat suivant :

$$\langle a\rangle_{n,t_1,\ldots,t_n} = \alpha e^{-\gamma t_R/2 - i\chi \sum_{k=1}^{n} t_k} \tag{14}$$

où la moyenne est prise dans l'état $|\psi_{n,t_1,\ldots,t_n}\rangle$.

2.5 Moyenne sur les sauts

Les questions a, b et c ne sont pas indispensables pour la suite du problème.

a) On souhaite calculer la probabilité $P_0(t)$ qu'il n'y ait aucun saut quantique dans l'intervalle de temps $[0, t]$. On revient à la formulation de la méthode des fonctions d'onde Monte-Carlo, avec un pas temporel dt fini mais très petit devant $1/\gamma$. Montrer alors que

$$P_0(t) = \prod_{k=1}^{t/dt} [1 - \Gamma(k\, dt) dt] \tag{15}$$

où l'on a introduit le taux dépendant du temps

$$\Gamma(\tau) = \gamma \langle \psi_0(\tau)|a^\dagger a|\psi_0(\tau)\rangle. \tag{16}$$

b) À l'aide des résultats de la sous-partie 2.2 calculer explicitement la fonction $\Gamma(\tau)$ en fonction de γ, $|\alpha|^2$ et τ.

c) Passer à la limite $dt \to 0$ dans (15). Montrer alors que P_0 s'exprime en terme d'une intégrale sur τ faisant intervenir la fonction $\Gamma(\tau)$. En déduire la valeur explicite de $P_0(t)$ en fonction de γ, $|\alpha|^2$ et t. Comment ce résultat se simplifie-t-il si $\gamma t \ll 1$?

d) On se place pour simplifier dans le régime $\gamma t \ll 1$. On admet alors que la densité de probabilité que se produisent dans l'intervalle temporel $[0, t]$ exactement n sauts aux instants $t_1 < t_2 < \ldots t_n$ est donnée par

$$P_t(n, t_1, \ldots, t_n) = \lambda^n e^{-\lambda t} \tag{17}$$

avec $\lambda = \gamma|\alpha|^2$. Expliquer physiquement pourquoi c'est le taux $\lambda = \gamma|\alpha|^2$ qui apparaît dans cette formule, et pas γ.

e) On établit dans cette question un résultat général utile pour la suite. On considère une fonction $F(t_1, \ldots, t_n)$ arbitraire mais complètement symétrique des n temps $t_1, \ldots, t_n$. Montrer en s'appuyant sur une analogie avec un problème quantique de n bosons que

$$\int_{0<t_1<\ldots<t_n<t} dt_1 \ldots dt_n \, F(t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{n!} \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^t dt_n F(t_1, \ldots, t_n). \tag{18}$$

f) En utilisant la relation (18) vérifier que la distribution de probabilité $P_t(n, t_1, \ldots, t_n)$ est correctement normalisée à l'unité.

g) On va procéder enfin à la moyenne sur l'ensemble des évolutions Monte-Carlo possibles et calculer ainsi $\langle a \rangle(t_R) = \mathrm{Tr}[a\rho(t_R)]$, moyenne du champ à l'instant t_R en présence de pertes. Moyenner donc l'expression (14) à l'aide de la distribution de probabilité (17).

e) Interpréter physiquement le résultat de la question précédente. Quelle est la contribution à la moyenne $\langle a \rangle(t_R)$ des réalisations Monte-Carlo ayant subi au moins un saut quantique ? Combien le champ doit-il perdre de quanta en moyenne pour que l'amplitude du champ $\langle a \rangle$ à $t = t_R$ soit réduite d'un facteur e ?

3 Origine de la forte sensibilité de $\langle a \rangle(t_R)$ aux pertes

On suppose dans cette question que les pertes sont négligeables, et l'on souhaite calculer le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ du champ à l'instant $t = t_R/2$.

a) Rappeler le développement de l'état initial $|\psi(0)\rangle$ sur les états de Fock $|n\rangle$.

b) Comment évoluerait un état initial égal à $|n\rangle$ sous l'effet du hamiltonien H ? En déduire le développement de $|\psi(t)\rangle$ sur la base de Fock $|n\rangle$.

c) On se place à l'instant $t = t_R$. Vérifier que $|\psi(t_R)\rangle$ est alors très simple.

d) Vérifier la relation suivante, pour n entier arbitraire :

$$e^{i\pi n(n-1)/2} = \sqrt{2}\cos(\pi/4 - \pi n/2). \tag{19}$$

e) On se place à l'instant $t = t_R/2$. Montrer que le champ est alors dans une superposition cohérente de deux états de Glauber différents.

f) Vérifier que, dans la limite $|\alpha|^2 \gg 1$, l'état précédent est un chat de Schrödinger.

g) À la lumière de la question précédente, retrouver physiquement les conclusions de la section 2.5. On justifiera la réponse avec grand soin.