Excitation d'un gaz de Bose bidimensionnel par un champ de jauge transverse

M2 de physique quantique 2009-2010

Examen de mécanique quantique I

Y. Castin et A. Sinatra

On considère un gaz de Bose non relativiste à deux dimensions, dans l'espace continu du plan xOy, dans une boîte de quantification carrée de côté L avec des conditions aux limites périodiques.

Le gaz est composé d'atomes neutres, de masse m, possédant une structure interne, sous la forme de deux états fondamentaux dégénérés a et b et d'un état excité e. Les niveaux fondamentaux sont stables, alors que le niveau excité décroît avec le taux d'émission spontanée Γ. On prend l'énergie de a et b comme origine des énergies, et l'on se place dans le référentiel atomique interne tournant à la fréquence de résonance atomique. Comme les atomes passent un temps très court dans e, de l'ordre de $1/\Gamma$, on y néglige leur énergie cinétique (sous la condition $p^2/2m \ll \hbar\Gamma$), si bien que le Hamiltonien libre s'écrit en seconde quantification :

$$H_{\text{libre}} = \int_{[0,L]^2} d^2r \, \frac{\hbar^2}{2m} \sum_\alpha \left[(\partial_\alpha \psi_a^\dagger)(\partial_\alpha \psi_a) + (\partial_\alpha \psi_b^\dagger)(\partial_\alpha \psi_b) \right]. \tag{1}$$

Dans cette expression, $\psi_a(\mathbf{r}), \psi_b(\mathbf{r})$ (et de même $\psi_e(\mathbf{r})$) sont les opérateurs champs pour les atomes dans les états internes a, b (et e) respectivement. Ils obéissent aux relations de commutation bosoniques habituelles. La somme sur α porte sur les directions de l'espace, $\alpha \in \{x, y\}$, et l'opérateur ∂_α est un raccourci pour la dérivation ∂_{r_α} par rapport à la coordonnée r_α du vecteur position $\mathbf{r}$. On a choisi dans (1) la forme manifestement hermitienne, plutôt que l'expression habituelle en terme du Laplacien. Ceci simplifiera un calcul dans la suite.

Les atomes dans les niveaux fondamentaux interagissent entre eux, par des potentiels que l'on supposera être des distributions de Dirac en dimension deux avec des constantes de couplage g_{aa}, g_{bb} et g_{ab} suivant l'état interne des deux atomes en interaction. En seconde quantification, ceci correspond au terme d'interaction suivant dans le Hamiltonien :

$$H_{\text{int}} = \int_{[0,L]^2} d^2r \, \left[\frac{1}{2} g_{aa} \psi_a^\dagger \psi_a^\dagger \psi_a \psi_a + \frac{1}{2} g_{bb} \psi_b^\dagger \psi_b^\dagger \psi_b \psi_b + g_{ab} \psi_a^\dagger \psi_b^\dagger \psi_b \psi_a \right]. \tag{2}$$

Les atomes dans l'état e ne subissent pas d'interaction.

Initialement, les atomes du gaz sont tous dans l'état fondamental a, et le gaz est à l'équilibre thermique dans l'ensemble canonique à N particules à la température T. On va exciter le système en envoyant deux faisceaux laser pratiquement à résonance avec la transition atomique :

- le premier faisceau laser est appelé **faisceau de couplage** ; il excite seulement la transition $b \leftrightarrow e$; c'est une onde plane se propageant dans le plan xOy suivant l'axe Oy donc avec le vecteur d'onde $\mathbf{k}_c = k_c \mathbf{e}_y$, $k_c > 0$, $\mathbf{e}_y$ étant le vecteur unitaire suivant l'axe Oy. Le couplage de ce faisceau aux atomes est caractérisé par une pulsation de Rabi indépendante du temps :

$$\Omega_c(\mathbf{r}) = \Omega_c^0 e^{ik_c y}. \tag{3}$$

  Le faisceau de couplage est donc exactement à résonance avec la transition et son intensité reste constante pendant toute la durée de l'expérience.

- le second faisceau laser est appelé **faisceau sonde** ; il excite seulement la transition $a \leftrightarrow e$; il est composé de deux ondes planes de même intensité se propageant dans le plan xOz et faisant un petit angle $\pm\theta$ avec l'axe Oz. Les atomes dans le plan xOy voient donc le faisceau sonde sous la forme d'une superposition de deux ondes planes se propageant suivant l'axe Ox avec des vecteurs d'onde $\pm\mathbf{q}/2$, où $\mathbf{q} = q\mathbf{e}_x$, $q > 0$, $\mathbf{e}_x$ étant le vecteur unitaire suivant l'axe Ox. Le couplage du faisceau sonde aux atomes est caractérisé par une pulsation de Rabi qui dépend du temps :

$$\Omega_s(\mathbf{r}, t) = \Omega_s^0 e^{-i\Delta t} [\mathcal{A}(t)]^{1/2} \left(e^{iqx/2} + e^{-iqx/2}\right). \tag{4}$$

  L'amplitude complexe Ω_s^0 est indépendante du temps. Le désaccord Δ du faisceau sonde par rapport à la transition atomique est non nul mais très faible devant le taux d'émission spontanée Γ. La fonction du temps $t \to \mathcal{A}(t)$ est réelle positive et varie lentement à l'échelle de $1/\Gamma$; elle décrit une variation d'intensité du faisceau sonde, que l'on allume, puis que l'on éteint lentement.

En seconde quantification, le couplage des atomes aux faisceaux laser est donc décrit par l'opérateur hamiltonien suivant :

$$V_{\mathrm{AL}} = \int_{[0,L]^2} d^2 r \left[\frac{\hbar\Omega_s(\mathbf{r}, t)}{2} \psi_e^\dagger \psi_a + \frac{\hbar\Omega_c(\mathbf{r})}{2} \psi_e^\dagger \psi_b + \text{h.c.} \right]. \tag{5}$$

Le Hamiltonien total du système vaut donc

$$H = H_{\mathrm{libre}} + H_{\mathrm{int}} + V_{\mathrm{AL}}. \tag{6}$$

Dans la première partie de l'énoncé, on montre que l'effet des faisceaux laser, après élimination adiabatique de l'état excité e, est de créer sur les atomes un champ de jauge $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ que l'on précisera. Dans la deuxième partie, on dérive l'expression formelle perturbative de l'énergie déposée dans le gaz par le champ de jauge jusqu'au second ordre en $\mathbf{A}$, sachant que $\mathbf{A} \equiv \mathbf{0}$ à $t < 0$ et $t \to +\infty$; on montre ensuite, à l'aide de la théorie de Bogoliubov, que la mesure de l'énergie déposée permet d'accéder, dans une certaine limite, à la fraction normale du gaz.

Il est conseillé de traiter les questions et les parties dans leur ordre d'apparition.

1 Création d'un champ de jauge transverse

1.1 Élimination adiabatique de l'état excité

On suppose que l'opérateur densité σ du gaz d'atomes en présence du couplage laser obéit à l'équation pilote

$$\frac{d}{dt}\sigma = \frac{1}{i\hbar}[H,\sigma] + \Gamma \int_{[0,L]^2} d^2r [\psi_e(\mathbf{r})\sigma\psi_e^\dagger(\mathbf{r}) - \frac{1}{2}\{\psi_e^\dagger(\mathbf{r})\psi_e(\mathbf{r}),\sigma\}] \tag{7}$$

où $\{A,B\} = AB + BA$ est l'anticommutateur et le Hamiltonien H est donné par (6).

a) Montrer que cette équation pilote est de la forme de Lindblad, avec des opérateurs de saut $C(\mathbf{r})$ que l'on précisera. La trace de σ est-elle conservée ?

b) Le nombre total de particules est-il conservé ? Dire si l'équation pilote (7) donne une représentation fidèle de l'effet de l'émission spontanée.

c) On passe en point de vue de Heisenberg pour le système : les opérateurs champs dépendent maintenant du temps, on les note $\psi_\gamma(\mathbf{r},t)$ avec $\gamma \in \{a,b,e\}$. Comme le système n'est pas isolé, les équations d'évolution ne sont pas seulement obtenues en prenant le commutateur avec le Hamiltonien mais il faut rajouter un terme dissipatif à l'équation, plus une force de Langevin quantique $F(\mathbf{r},t)$ (non hermitienne) représentant le bruit quantique entrant dans le système, de façon à préserver les relations de commutation bosoniques entre les champs. On admet alors que les équations correctes sont

$$\partial_t\psi_a(\mathbf{r},t) = \frac{1}{i\hbar}[\psi_a, H] \tag{8}$$

$$\partial_t\psi_b(\mathbf{r},t) = \frac{1}{i\hbar}[\psi_b, H] \tag{9}$$

$$\partial_t\psi_e(\mathbf{r},t) = \frac{1}{i\hbar}[\psi_e, H] - \frac{1}{2}\Gamma\psi_e(\mathbf{r},t) + F(\mathbf{r},t). \tag{10}$$

La force de Langevin, de moyenne nulle, est définie par ses fonctions de corrélation, dont l'expression ici n'est pas utile. On ne demande pas pour l'instant d'expliciter les équations (8) et (9). En revanche, écrire explicitement l'équation (10) et montrer qu'on peut la mettre sous la forme

$$\partial_t\psi_e(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{2}\Gamma\psi_e(\mathbf{r},t) + S(\mathbf{r},t) \tag{11}$$

où le terme “source” $S(\mathbf{r},t)$ ne fait pas intervenir l'opérateur champ $\psi_e(\mathbf{r},t)$.

d) En considérant le terme source comme une donnée, intégrer formellement l'équation (11). On doit trouver que $\psi_e(\mathbf{r},t)$ s'exprime en fonction de sa valeur à l'instant initial $t = t_0$ et d'une intégrale faisant intervenir $S(\mathbf{r},t')$ avec $t_0 \le t' \le t$.

e) On fait tendre t_0 vers $-\infty$ à t fixé. En déduire que

$$\psi_e(\mathbf{r},t) = \int_0^{+\infty} d\tau e^{-\Gamma\tau/2} S(\mathbf{r},t-\tau). \tag{12}$$

f) On suppose que Γ est assez élevé pour que l'on puisse, dans l'intégrand de (12), négliger la dépendance en τ de la pulsation de Rabi $\Omega_s(\mathbf{r}, t-\tau)$ et des champs $\psi_a(\mathbf{r}, t-\tau)$, $\psi_b(\mathbf{r}, t-\tau)$. Effectuer alors explicitement les intégrales correspondantes sur τ et en déduire l'expression de $\psi_e(\mathbf{r}, t)$ en fonction de $\Omega_s(\mathbf{r}, t)$, $\Omega_c(\mathbf{r})$, $\psi_a(\mathbf{r}, t)$, $\psi_b(\mathbf{r}, t)$ et d'une intégrale temporelle de la force de Langevin.

g) On effectue un changement de variables sur les champs. On introduit d'abord une notation spinorielle, sous forme de vecteurs à deux composantes, la première composante correspondant à l'état interne a et la seconde à l'état b. On pose ainsi

$$\vec{\psi}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_a(\mathbf{r}, t) \\ \psi_b(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

c'est un spineur dont les composantes sont des opérateurs. Avec cette notation spinorielle, le Hamiltonien libre (1) prend la forme suivante :

$$H_{\text{libre}} = \int_{[0,L]^2} d^2r\, \frac{\hbar^2}{2m} \sum_\alpha (\partial_\alpha \vec{\psi}^{\,\dagger}) \cdot (\partial_\alpha \vec{\psi}). \tag{14}$$

On introduit aussi les deux champs de vecteurs dont les composantes sont des nombres complexes :

$$\vec{u}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{N}(\mathbf{r}, t) \begin{pmatrix} 1 \\ -\epsilon(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{N}(\mathbf{r}, t) \begin{pmatrix} \epsilon^*(\mathbf{r}, t) \\ 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

où l'on a posé

$$\epsilon(\mathbf{r}, t) = \frac{\Omega_s(\mathbf{r}, t)}{\Omega_c(\mathbf{r})} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{[1 + |\epsilon(\mathbf{r}, t)|^2]^{1/2}}. \tag{16}$$

Vérifier que les deux vecteurs $\vec{u}(\mathbf{r}, t)$ et $\vec{v}(\mathbf{r}, t)$ sont orthogonaux et normalisés à l'unité, pour tout $\mathbf{r}$ et tout t. On en déduit que les opérateurs champs

$$\phi(\mathbf{r}, t) \equiv \vec{u}^{\,*}(\mathbf{r}, t) \cdot \vec{\psi}(\mathbf{r}, t) \tag{17}$$

$$\chi(\mathbf{r}, t) \equiv \vec{v}^{\,*}(\mathbf{r}, t) \cdot \vec{\psi}(\mathbf{r}, t) \tag{18}$$

obéissent aux relations de commutation bosoniques habituelles. Il est utile de garder à l'esprit la relation inverse

$$\vec{\psi}(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}, t)\, \vec{u}(\mathbf{r}, t) + \chi(\mathbf{r}, t)\, \vec{v}(\mathbf{r}, t). \tag{19}$$

h) À partir des équations de Heisenberg (8) et (9), et des relations (17) et (19), montrer que

$$\partial_t \phi = (\partial_t \vec{u}^{\,*}) \cdot (\phi\, \vec{u} + \chi\, \vec{v}\,) + \frac{1}{i\hbar}[\phi, H]. \tag{20}$$

i) Vérifier que, dans V_{AL} donné par (5), seuls les termes suivants donnent une contribution non nulle aux équations du mouvement (8) et (9) de ψ_a et ψ_b :

$$V_{\text{AL}}^{\text{utile}} = \int_{[0,L]^2} d^2r \left(\frac{\hbar \Omega_s^*(\mathbf{r}, t)}{2} \psi_a^\dagger + \frac{\hbar \Omega_c^*(\mathbf{r})}{2} \psi_b^\dagger \right) \psi_e. \tag{21}$$

Remplacer dans (21) le champ ψ_e par son expression obtenue à la question 1.1.f. Montrer qu'en remplaçant alors ψ_a et ψ_b par leurs expressions en fonction des champs ϕ et χ, on obtient un terme hamiltonien effectif remarquablement simple :

$$V_{\rm AL}^{\rm eff} = \int_{[0,L]^2} d^2r \left[\left(-\frac{i\hbar\Gamma_\chi(\mathbf{r},t)}{2} \right) \chi^\dagger(\mathbf{r},t)\chi(\mathbf{r},t) + \chi^\dagger(\mathbf{r},t)\mathcal{F}(\mathbf{r},t) \right] \tag{22}$$

où Γ_χ est un taux, dépendant de la position et du temps, que l'on exprimera en fonction de Γ, Ω_c et Ω_s. Les opérateurs $\mathcal{F}(\mathbf{r},t)$ font intervenir la force de Langevin $F(\mathbf{r},t')$ aux temps $t' \leq t$; on notera qu'ils doivent commuter avec $\chi(\mathbf{r}',t)$ et $\phi(\mathbf{r}',t)$ pour que l'expression approchée utilisée pour ψ_e ait les bonnes relations de commutation avec ψ_a et ψ_b.

j) Calculer la contribution $\frac{1}{i\hbar}[\phi, V_{\rm AL}^{\rm eff}]$ de $V_{\rm AL}$ à l'équation d'évolution (20) du champ ϕ. Donner une interprétation très simple du résultat obtenu, en considérant le cas d'un système à un atome seul au point $\mathbf{r}$, dans une combinaison linéaire bien choisie des états $|a\rangle$ et $|b\rangle$.

k) Calculer $\frac{1}{i\hbar}[\chi, V_{\rm AL}^{\rm eff}]$. Avec quel taux évolue le champ χ sous l'effet du couplage atome-laser ? Comment doit se comparer ce taux à Γ pour que l'approximation faite à la question 1.1f soit justifiée ? En déduire une condition sur Ω_c, Ω_s et Γ, que l'on suppose remplie dans la suite.

1.2 Apparition d'un champ de jauge

On a vu précédemment qu'après élimination adiabatique de l'état excité e, les champs ϕ et χ ne sont pas couplés par $V_{\rm AL}$. Par ailleurs, les champs ϕ et χ sont bien entendu couplés par les termes du Hamiltonien $H_{\rm libre}$ et $H_{\rm int}$, et aussi par le fait que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dépendent du temps, cf. le premier terme dans le membre de droite de (20). On suppose cependant que ces couplages sont faibles devant les écarts d'énergie complexes $-i\hbar\Gamma_\chi/2$ apparents dans (22) et on les néglige totalement dans toute la suite. Dans l'équation du mouvement (20), ceci revient à négliger tous les champs χ, donc en particulier à remplacer le spineur $\vec{\psi}$ par

$$\vec{\psi} \simeq \phi\, \vec{u}(\mathbf{r},t). \tag{23}$$

a) Montrer que, sous cette approximation, le champ ϕ évolue suivant un Hamiltonien hermitien H_ϕ donné formellement par

$$H_\phi = (H_{\rm libre} + H_{\rm int})_{\chi\to 0} + \int_{[0,L]^2} d^2r\, W_0(\mathbf{r},t)\phi^\dagger\phi \tag{24}$$

où l'on a remplacé χ et $\chi^\dagger$ par zéro dans les Hamiltoniens libre et d'interaction, et où l'on a introduit le potentiel ordinaire

$$W_0(\mathbf{r},t) = -\frac{i\hbar}{2}[\vec{u}^{\,*}(\mathbf{r},t)\cdot\partial_t\vec{u}(\mathbf{r},t) - \text{c.c}]. \tag{25}$$

On utilisera le fait que $\partial_t(\vec{u}^{\,*}\cdot\vec{u}\,) = 0$ pour obtenir la forme (25).

b) On rappelle que le couplage de particules sans spin à un champ de jauge $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ fait intervenir en première quantification l'opérateur hamiltonien

$$V_{\text{cdj}} = -\sum_{i=1}^{\hat{N}} \frac{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_i,t) + \mathbf{A}(\mathbf{r}_i,t)\cdot \mathbf{p}_i}{2m} \tag{26}$$

où $\hat{N}$ est l'opérateur nombre total de particules, $\mathbf{r}_i$ et $\mathbf{p}_i$ sont les opérateurs position et impulsion de la particule numéro i. On donne l'écriture de ce couplage en seconde quantification :

$$V_{\text{cdj}} = -\int_{[0,L]^2} d^2r\, \mathbf{j}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \tag{27}$$

où l'on a introduit l'opérateur vectoriel hermitien $\mathbf{j}$, appelé opérateur courant, et de composantes

$$j_\alpha(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2im}[\phi^\dagger\partial_\alpha\phi - (\partial_\alpha\phi^\dagger)\phi]. \tag{28}$$

Effectuer explicitement l'approximation (23) dans H_{libre} donné par (14). On doit obtenir l'expression suivante faisant apparaître un champ de jauge effectif $\mathbf{A}$:

$$(H_{\text{libre}})_{\chi\to 0} = \int_{[0,L]^2} d^2r \left\{ \frac{\hbar^2}{2m}\left[\sum_\alpha (\partial_\alpha\phi^\dagger)(\partial_\alpha\phi)\right] - \mathbf{j}\cdot\mathbf{A} + W_1\phi^\dagger\phi \right\}. \tag{29}$$

On donnera l'expression du potentiel $W_1(\mathbf{r},t)$ et des coordonnées $A_\alpha(\mathbf{r},t)$ du champ de jauge $\mathbf{A}$ en fonction de $\vec{u}$ et des $\partial_\alpha\vec{u}$.

c) Effectuer explicitement l'approximation (23) dans H_{int} donné par (2), en utilisant l'expression (15) de $\vec{u}(\mathbf{r},t)$. On doit obtenir

$$(H_{\text{int}})_{\chi\to 0} = \int_{[0,L]^2} d^2r\, \frac{1}{2} g(\mathbf{r},t)\phi^\dagger\phi^\dagger\phi\phi. \tag{30}$$

Donner l'expression de la constante de couplage effective $g(\mathbf{r},t)$ en fonction de $|\epsilon(\mathbf{r},t)|^2$.

d) On suppose désormais que l'intensité du faisceau sonde est très faible devant celle du faisceau de couplage, si bien que $|\epsilon| \ll 1$. On se limite à l'ordre deux inclus en ϵ. Montrer alors que

$$A_\alpha(\mathbf{r},t) \simeq \frac{i\hbar}{2}[\epsilon^*(\mathbf{r},t)\partial_\alpha\epsilon(\mathbf{r},t) - \text{c.c.}] \tag{31}$$

$$W_0(\mathbf{r},t) \simeq -\frac{i\hbar}{2}[\epsilon^*(\mathbf{r},t)\partial_t\epsilon(\mathbf{r},t) - \text{c.c.}] \tag{32}$$

$$W_1(\mathbf{r},t) \simeq \frac{\hbar^2}{2m}\sum_\alpha |\partial_\alpha\epsilon(\mathbf{r},t)|^2 \tag{33}$$

$$g(\mathbf{r},t) \simeq g_{aa} + 2(g_{ab} - g_{aa})|\epsilon(\mathbf{r},t)|^2. \tag{34}$$

Dans la suite, on suppose qu'on utilise une espèce atomique (comme le rubidium) telle que $g_{ab} \simeq g_{aa}$, et l'on considère donc que $g(\mathbf{r},t) = g = g_{aa}$ est indépendant du temps et de l'espace.

e) On prend maintenant en compte les formes explicites (3) et (4) des pulsations de Rabi des faisceaux de couplage et sonde. On pose

$$\epsilon_0 = \frac{\Omega_s^0}{\Omega_c^0} \ . \tag{35}$$

Montrer que, pour un choix judicieux du désaccord Δ défini dans (4), $W = W_0 + W_1$ ne dépend pas de la position $\mathbf{r}$. Un tel potentiel W peut-il avoir un effet sur la dynamique du gaz ? On omettra W dans la suite.

f) Montrer que $A_x \equiv 0$. Calculer explicitement A_y en fonction de k_c, ϵ_0, $\mathcal{A}(t)$, e^{iqx} et e^{-iqx}.

g) Montrer qu'en pratique, on peut retenir pour H_ϕ l'expression suivante :

$$H_\phi = H_0 + V. \tag{36}$$

Le Hamiltonien non perturbé

$$H_0 = \int_{[0,L]^2} d^2r \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \left[\sum_\alpha (\partial_\alpha \phi^\dagger)(\partial_\alpha \phi) \right] + \frac{1}{2} g \phi^\dagger \phi^\dagger \phi \phi \right\} \tag{37}$$

est équivalent au Hamiltonien du gaz en l'absence d'excitation laser, lorsque tous les atomes sont dans l'état interne a. La perturbation V fait apparaître le couplage à un champ de jauge transverse car dirigé selon y et dépendant de la seule coordonnée x :

$$V = -\eta \mathcal{A}(t) \int_{[0,L]^2} d^2r j_y(\mathbf{r}) \left(e^{iqx} + e^{-iqx} \right) . \tag{38}$$

Pour obtenir cette expression de V, on omettra un terme dans A_y, en montrant qu'il n'a pas d'effet sur la dynamique, sachant que le gaz est initialement à l'équilibre thermique. Pour cela, on pourra se demander ce que représente $\int d^2r j_y(\mathbf{r})$ et voir si cette quantité commute avec H_ϕ. On donnera aussi l'expression de η en fonction de $\hbar k_c$ et ϵ_0.

2 Lien entre l'énergie déposée par un champ de jauge transverse et la fraction normale du gaz

2.1 Préliminaires

On considère un système de Hamiltonien non perturbé H_0 indépendant du temps. À partir de l'instant $t = 0$, on lui applique une perturbation dépendant du temps et arbitrairement faible :

$$V = -\eta \mathcal{A}(t) \mathcal{V}. \tag{39}$$

Ici le nombre réel η est le petit paramètre formel, l'opérateur hermitien $\mathcal{V}$ est indépendant du temps et de η, l'amplitude réelle $\mathcal{A}(t)$, indépendante de η, est nulle pour $t < 0$ et tend rapidement vers zéro lorsque $t \to +\infty$. Le système initialement libre se retrouve donc libre à $t = +\infty$, mais son énergie moyenne a été modifiée par la perturbation. Il s'agit ici de calculer ce changement d'énergie jusqu'au second ordre inclus en η. Le spectre de H_0 est supposé être entièrement discret.

a) On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, le système est dans un état propre $|\lambda\rangle$ de H_0 de valeur propre E_λ. On rappelle que l'opérateur d'évolution du système de l'instant 0 à l'instant t, soit $U(t)$, admet un développement en puissances de la perturbation V donc de η. En déduire que le vecteur d'état du système à l'instant $t > 0$ admet le développement formel suivant en puissances de η :

$$|\psi(t)\rangle = |\psi_0(t)\rangle + \eta|\psi_1(t)\rangle + \eta^2|\psi_2(t)\rangle + \ldots \tag{40}$$

Donner l'expression de $|\psi_0(t)\rangle$ en fonction de $|\lambda\rangle$, E_λ et du temps. Donner l'expression de $|\psi_1(t)\rangle$ en fonction de $|\lambda\rangle$, E_λ, H_0, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{A}(\tau)$, où $\tau \in [0, t]$. L'expression obtenue contient une intégrale simple sur le temps τ. L'expression de $|\psi_2(t)\rangle$ n'est pas demandée.

b) Montrer que le changement de l'énergie moyenne non perturbée $\langle H_0\rangle$ entre l'instant initial et l'instant t vaut exactement $\langle\psi(t)|(H_0 - E_\lambda)|\psi(t)\rangle$.

c) En déduire que le changement d'énergie du système entre les instants $t = 0$ et $t = +\infty$ vaut, jusqu'à l'ordre deux inclus en η :

$$\Delta E \simeq \lim_{t\to+\infty} \eta^2 \,\langle\psi_1(t)|(H_0 - E_\lambda)|\psi_1(t)\rangle. \tag{41}$$

d) On suppose que l'amplitude d'excitation, après un branchement soudain à l'instant $t = 0$, décroît exponentiellement en temps :

$$\mathcal{A}(t) = Y(t)e^{-\gamma t} \tag{42}$$

où $Y(t)$ est la distribution d'Heaviside et $\gamma > 0$. Montrer que

$$\Delta E \simeq \eta^2 \sum_{\lambda'\neq\lambda} \frac{E_{\lambda'} - E_\lambda}{(E_{\lambda'} - E_\lambda)^2 + (\hbar\gamma)^2} |\langle\lambda'|\mathcal{V}|\lambda\rangle|^2, \tag{43}$$

où la somme est prise sur tous les états propres $|\lambda'\rangle$ de H_0 autres que $|\lambda\rangle$.

e) En réalité, le système initialement est dans un mélange statistique des états propres $|\lambda\rangle$ de H_0 avec la distribution de probabilité π_λ. De plus, on s'intéresse à la limite d'un débranchement très lent de la perturbation, $\gamma \to 0$. Pour simplifier, on suppose que le spectre de H_0 est non dégénéré. Montrer que le changement moyen d'énergie, divisé par η^2, s'exprime comme la somme double suivante sur les états propres de H_0 :

$$\text{Signal}\,(\mathcal{V}) \equiv \lim_{\gamma\to 0}\lim_{\eta\to 0} \frac{\langle\Delta E\rangle}{\eta^2} = \frac{1}{2}\sum_{\lambda}\sum_{\lambda'\neq\lambda} |\langle\lambda'|\mathcal{V}|\lambda\rangle|^2 \frac{\pi_\lambda - \pi_{\lambda'}}{E_{\lambda'} - E_\lambda}. \tag{44}$$

On se souviendra du fait que $\mathcal{V}$ est hermitien. La notation Signal se justifie par le fait que la quantité (44) est en principe mesurable expérimentalement. Il suffit d'appliquer une perturbation suffisamment faible que l'on débranche assez lentement, et de mesurer l'énergie moyenne du système avant et après la perturbation. Dans la suite, on va utiliser cette notation Signal $(\mathcal{V})$, en l'appliquant même au cas où l'argument de la fonction Signal est un opérateur non hermitien.

2.2 Le "Signal" pour un gaz de Bogoliubov

On traite le gaz de Bose décrit par le champ ϕ dans l'approximation de Bogoliubov. Le Hamiltonien non perturbé s'écrit alors

$$H_0 = E_0 + \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} \epsilon_k b^\dagger_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} \tag{45}$$

où E_0 est l'énergie de l'état fondamental, $b^\dagger_{\mathbf{k}}$ (respectivement $b_{\mathbf{k}}$) crée (annihile) une excitation de Bogoliubov de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et d'énergie ϵ_k. Initialement, le gaz est à l'équilibre thermique dans l'ensemble canonique à la température T, avec un opérateur densité $\sigma = Z^{-1}e^{-\beta H_0}$, $\beta = 1/(k_B T)$ et Z la fonction de partition. La perturbation V provient du champ de jauge créé par laser dans la partie 1, voir (38). On la met sous la forme (39) avec

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_q + \mathcal{V}_{-q} \tag{46}$$

où $\mathcal{V}_{-q} = \mathcal{V}_q^\dagger$ et

$$\mathcal{V}_q = \int_{[0,L]^2} d^2r\, e^{iqx} j_y(\mathbf{r}). \tag{47}$$

L'objectif ici est de calculer Signal$\,(\mathcal{V})$, où la fonction Signal est définie par (44), dans la limite $q \to 0$, et de comparer le résultat à l'expression de la fraction normale du gaz, tout ceci bien entendu dans l'approximation de Bogoliubov.

On notera que la limite $q \to 0$ sous-entend la prise de la limite thermodynamique, puisque les conditions aux limites périodiques conduisent à $q \geq 2\pi/L$ si $q \neq 0$. On pourrait alors s'inquiéter du fait que l'approche de Bogoliubov n'est pas applicable dans cette limite, puisque le gaz est à deux dimensions. Cependant, la validité de l'approche de Bogoliubov dépend en fait des observables considérées, et l'on oubliera ce problème ici.

a) On donne l'expression suivante de $\mathcal{V}_q$ en seconde quantification, en représentation impulsion :

$$\mathcal{V}_q = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar k_y}{m} a^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}} \tag{48}$$

avec $\mathbf{q} = q\mathbf{e}_x$ et $a_{\mathbf{k}}$ est l'opérateur d'annihilation d'une particule dans l'onde plane de vecteur d'onde $\mathbf{k}$. On considère un vecteur d'état du système d'impulsion totale P_x bien définie selon l'axe Ox. Que devient l'impulsion totale selon Ox après action de $\mathcal{V}_q$? Même question pour $\mathcal{V}_{-q}$. À partir de propriétés de symétrie de H_0, et de l'expression (44), en déduire que

$$\text{Signal}\,(\mathcal{V}) = 2\,\text{Signal}\,(\mathcal{V}_q). \tag{49}$$

b) On va exprimer l'opérateur $\mathcal{V}_q$ en termes des opérateurs de création et d'annihilation de quasi-particules de Bogoliubov. Quelles sont les contributions de $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{k} = -\mathbf{q}$ dans (48) ? On donne donc simplement :

$$A^\dagger_\theta a_{\mathbf{k}} = U_k b_{\mathbf{k}} + V_k b^\dagger_{-\mathbf{k}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{k} \neq \mathbf{0}, \tag{50}$$

où l'opérateur A_θ contient la phase du condensat et vérifie $A_\theta A^\dagger_\theta = 1$. On n'aura pas besoin de l'expression explicite des amplitudes réelles U_k et V_k ; il suffit de se souvenir qu'elles dépendent seulement du module k du vecteur d'onde $\mathbf{k}$, et qu'elles sont normalisées ainsi :

$$U_k^2 - V_k^2 = 1. \tag{51}$$

Montrer que

$$\mathcal{V}_q = \mathcal{V}_q^{(0)} + \mathcal{V}_q^{(2)} + \mathcal{V}_q^{(-2)} \tag{52}$$

où l'on a regroupé les termes contenant respectivement un opérateur b et un opérateur $b^\dagger$, deux opérateurs $b^\dagger$ et deux opérateurs b :

$$\mathcal{V}_q^{(0)} = \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0},-\mathbf{q}} \frac{\hbar k_y}{m}(U_k U_{|\mathbf{k}+\mathbf{q}|} - V_k V_{|\mathbf{k}+\mathbf{q}|})\, b^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} b_{\mathbf{k}} \tag{53}$$

$$\mathcal{V}_q^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0},-\mathbf{q}} \frac{\hbar k_y}{m}(V_k U_{|\mathbf{k}+\mathbf{q}|} - U_k V_{|\mathbf{k}+\mathbf{q}|})\, b^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} b^\dagger_{-\mathbf{k}} \tag{54}$$

$$\mathcal{V}_q^{(-2)} = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0},-\mathbf{q}} \frac{\hbar k_y}{m}(U_k V_{|\mathbf{k}+\mathbf{q}|} - V_k U_{|\mathbf{k}+\mathbf{q}|})\, b_{\mathbf{k}} b_{-(\mathbf{k}+\mathbf{q})}. \tag{55}$$

On pensera à utiliser dans certaines sommes le changement de variable $\mathbf{k'} = -(\mathbf{q}+\mathbf{k})$.

c) On rappelle que les états propres du Hamiltonien (45) sont des états de Fock de quasi-particules $|\lambda\rangle = |\{n_{\mathbf{k'}}\}\rangle$, avec des nombres d'occupation $n_{\mathbf{k'}}$ entiers dans chaque mode propre de Bogoliubov. En déduire que

$$\mathrm{Signal}\,(\mathcal{V}_q) = \mathrm{Signal}\,(\mathcal{V}_q^{(0)}) + \mathrm{Signal}\,(\mathcal{V}_q^{(2)}) + \mathrm{Signal}\,(\mathcal{V}_q^{(-2)}). \tag{56}$$

d) Donner la probabilité d'occupation π_λ de l'état propre $|\lambda\rangle = |\{n_{\mathbf{k'}}\}\rangle$ dans l'état thermique initial du gaz, en fonction de β, de la fonction de partition Z, des $\epsilon_{k'}$ et des $n_{\mathbf{k'}}$. Par ailleurs, on rappelle que le nombre d'occupation moyen $\bar{n}_k$ du mode de Bogoliubov de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ est donné par une loi de Bose et satisfait

$$e^{\beta\epsilon_k} = \frac{\bar{n}_k + 1}{\bar{n}_k}. \tag{57}$$

e) Calculer l'action de $\mathcal{V}_q^{(0)}$ sur $|\lambda\rangle = |\{n_{\mathbf{k'}}\}\rangle$, et montrer que les termes issus de valeurs de $\mathbf{k}$ différentes de la somme (53) sont des états de Fock $|\lambda'\rangle$ orthogonaux entre eux. Donner les différences d'énergie correspondantes, $E_{\lambda'} - E_\lambda$, ainsi les rapports $\pi_{\lambda'}/\pi_\lambda$. En utilisant la relation (57), en déduire que

$$\mathrm{Signal}\,(\mathcal{V}_q^{(0)}) = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0},-\mathbf{q}} \left(\frac{\hbar k_y}{m}\right)^2 (U_k U_{|\mathbf{k}+\mathbf{q}|} - V_k V_{|\mathbf{k}+\mathbf{q}|})^2 \frac{\bar{n}_{|\mathbf{k}+\mathbf{q}|} - \bar{n}_k}{\epsilon_k - \epsilon_{|\mathbf{k}+\mathbf{q}|}}. \tag{58}$$

f) On considère maintenant l'action de $\mathcal{V}_q^{(2)}$ sur $|\lambda\rangle = |\{n_{\mathbf{k'}}\}\rangle$. Montrer que le terme de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ de la somme (54) couple $|\lambda\rangle$ à un état de Fock $|\lambda'\rangle$, avec une amplitude $\langle\lambda'|\mathcal{V}_q^{(2)}|\lambda\rangle$ qui tend vers zéro lorsque $q \to 0$, et une différence d'énergie $E_{\lambda'} - E_\lambda$ qui ne tend pas vers zéro lorsque $q \to 0$. Vérifier que $\mathcal{V}_q^{(-2)}$ conduit également à cette propriété. En déduire que

$$\lim_{q\to 0} \mathrm{Signal}\,(\mathcal{V}_q^{(2)}) = \lim_{q\to 0} \mathrm{Signal}\,(\mathcal{V}_q^{(-2)}) = 0. \tag{59}$$

g) Il reste à calculer la limite de (58) lorsque $q \to 0$. Appliquer la règle de L'Hospital :

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x) \tag{60}$$

à la fonction f telle que $\bar{n}_k = f(\epsilon_k)$. En déduire que

$$\lim_{q \to 0} \text{Signal}\,(\mathcal{V}) = \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \left(\frac{\hbar k_y}{m} \right)^2 \beta \bar{n}_k (1 + \bar{n}_k). \tag{61}$$

h) Selon la définition habituelle, la fraction normale f_n du gaz est donnée par

$$f_n = \frac{\langle P_y^2 \rangle}{N m k_B T} \tag{62}$$

où P_y est l'opérateur impulsion totale du gaz selon l'axe Oy, et la moyenne est prise dans l'état d'équilibre thermique du gaz. Rappeler l'expression (vue en Travaux Dirigés) de l'opérateur impulsion totale dans l'approche de Bogoliubov, en fonction d'une somme sur $\mathbf{k}$ et de $b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}$. Obtenir une expression de f_n dans l'approximation de Bogoliubov, sous la forme d'une somme sur $\mathbf{k}$, en utilisant le théorème de Wick.

i) La mesure de Signal $(\mathcal{V})$ dans la limite $q \to 0$ permet-elle d'accéder à la fraction normale ? Donner la relation précise entre $\lim_{q \to 0} \text{Signal}\,(\mathcal{V})$ et f_n.

j) Que se passe-t-il si l'on intervertit les limites $q \to 0$ et $\gamma \to 0$? Quelle serait la valeur du signal dans ce cas ?