

Le gaz de Fermi bidimensionnel

M2 de physique quantique 2012-2013

Examen de mécanique quantique

Y. Castin et C. Trefzger

On considère un gaz de particules fermioniques de spin $1/2$, non relativistes et de masse m , vivant dans un espace à deux dimensions. Les particules d'états de spin opposé \uparrow et \downarrow ont des interactions binaires dans l'onde s , dont on fera tendre, à la fin des calculs, la portée b vers zéro à valeur fixée a de la longueur de diffusion en dimension deux. Le gaz ne subit pas de potentiel extérieur, il se trouve simplement dans une boîte de quantification carrée de côté L , $\mathbf{r} \in [0, L]^2$, c'est-à-dire que l'on impose à la fonction d'onde des conditions aux limites périodiques de période L suivant les axes orthogonaux Ox et Oy . On se place dans l'ensemble grand canonique, où l'on spécifie le potentiel chimique μ plutôt que le nombre total de particules N . De plus, on suppose que la température est nulle, $T = 0$, si bien que le gaz se trouve dans son état fondamental. On finira par passer à la limite thermodynamique, en faisant tendre L vers l'infini à μ fixé.

Comme l'on ne se restreint pas ici au régime d'interaction faible, on est conduit à utiliser l'approche variationnelle de la théorie de BCS, qui approxime l'état fondamental du gaz par un condensat de paires de particules, ce qui reste raisonnable à deux dimensions puisque l'existence d'un condensat à la limite thermodynamique n'y est pas interdite à $T = 0$. On obtiendra ainsi des expressions approchées pour la densité totale ρ du gaz et pour le gap Δ , paramètre apparaissant dans le spectre des excitations élémentaires. On testera ensuite la théorie en la comparant à des mesures effectuées sur des atomes froids.

Il est conseillé de traiter les questions dans leur ordre d'apparition. Les notes prises lors des cours d'Y. Castin et des Travaux Dirigés de C. Trefzger sont autorisées, de même que le photocopié du cours d'Y. Castin. L'usage de la calculatrice est autorisé pour les applications numériques demandées.

1 Description du modèle et diagonalisation du Hamiltonien de BCS

Comme on l'a vu dans la section 3.3.9 du cours, un modèle d'interaction en delta de Dirac n'a aucun sens en dimension deux, mais le substitut le plus simple, et que l'on va utiliser ici, est une interaction en delta de Kronecker dans un modèle sur réseau. On suppose donc que les positions \mathbf{r} des particules se trouvent sur un réseau carré d'axes propres Ox et Oy et de pas b , le rapport L/b étant entier. Ceci permet de limiter les vecteurs d'onde \mathbf{k} des particules à la première zone de Brillouin du réseau,

$$\mathbf{k} \in \text{PZB} = [-\pi/b, \pi/b]^2 \quad (1)$$

Contrairement à ce qui a été fait en cours, on se place dans l'ensemble grand canonique, si bien que l'on introduit le Hamiltonien grand canonique $H = H_{\text{can}} - \mu \hat{N}$, où H_{can} est le Hamiltonien dans l'ensemble canonique et \hat{N} l'opérateur nombre total de particules. Le potentiel chimique μ peut avoir ici un signe quelconque.

On se place en seconde quantification. On introduit la version discrète de l'opérateur champ $\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r})$, qui annihile une particule dans l'état de spin $\sigma \in \{\uparrow, \downarrow\}$ sur le site du réseau de position \mathbf{r} , avec une convention de normalisation telle que les relations d'anticommutation

$$\{\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}), \hat{\psi}_{\sigma'}(\mathbf{r}')\} = 0 \quad \text{et} \quad \{\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}), \hat{\psi}_{\sigma'}^\dagger(\mathbf{r}')\} = \frac{\delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \delta_{\sigma, \sigma'}}{b^2} \quad (2)$$

reproduisent celles en delta de Dirac de l'espace continu dans la limite $b \rightarrow 0$. Le Hamiltonien grand canonique du modèle sur réseau s'écrit donc

$$H = \sum_{\mathbf{r}, \sigma} b^2 \hat{\psi}_\sigma^\dagger [h_0 - \mu] \hat{\psi}_\sigma + g_0 \sum_{\mathbf{r}} b^2 \hat{\psi}_\uparrow^\dagger \hat{\psi}_\downarrow^\dagger \hat{\psi}_\downarrow \hat{\psi}_\uparrow \quad (3)$$

Dans le terme à un corps, on a introduit le raccourci de notation

$$h_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{r}}, \quad (4)$$

où l'opérateur Laplacien discret $\Delta_{\mathbf{r}}$ est défini par le fait qu'il admette, sur le réseau, la fonction $\mathbf{r} \mapsto \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ comme fonction propre avec la valeur propre $-k^2$, où \mathbf{k} est dans la première zone de Brillouin. On a donc

$$h_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = E_k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad \forall \mathbf{k} \in \text{PZB}, \quad \text{avec} \quad E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad (5)$$

bien que \mathbf{r} soit ici une variable discrète. Par ailleurs, la constante de couplage nue g_0 apparaissant dans l'interaction sur site est ajustée pour reproduire la valeur souhaitée de la longueur de diffusion a en dimension deux. On admet que

$$g_0 = \frac{2\pi \hbar^2}{m} \frac{1}{\ln(\mathcal{C}b/a)} \quad (6)$$

où la valeur de la constante numérique $\mathcal{C} > 0$ est connue mais n'est pas utile pour la suite. On se place ici dans le régime de faible portée de l'interaction, en particulier

$$b \ll a, \quad (7)$$

si bien que les interactions sont attractives, $g_0 < 0$, et vont conduire à l'appariement de type BCS entre fermions de spin opposé. Pour approximer l'état fondamental de H , on introduit donc les états variationnels de BCS non normalisés

$$|\Phi\rangle = \exp \left[\sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} b^4 \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}_1) \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}_2) \right] |0\rangle \quad (8)$$

où $|0\rangle$ est l'état vide de particules. La valeur du "champ de paire" $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ doit être obtenue par minimisation de la fonctionnelle énergie

$$E[\Phi] = \langle H \rangle = \frac{\langle \Phi | H | \Phi \rangle}{\langle \Phi | \Phi \rangle} \quad (9)$$

1.1 Condition de stationnarité de l'énergie

a) Par un argument simple, montrer que, pour tout Φ :

$$\langle \hat{\psi}_\uparrow^\dagger \hat{\psi}_\uparrow \rangle = \langle \hat{\psi}_\uparrow^\dagger \hat{\psi}_\downarrow \rangle = 0 \quad (10)$$

b) On appelle Φ_0 le minimiseur de $E[\Phi]$ et $\langle \dots \rangle_0$ la valeur moyenne dans l'état de BCS correspondant $|\Phi_0\rangle$. Pourquoi peut-on supposer que $\Phi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ est (i) une fonction à valeurs réelles, (ii) une fonction de $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ seulement, (iii) une fonction paire de $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$? Ces trois propriétés de Φ_0 seront supposées satisfaites dans la suite.

c) En déduire que, pour tout \mathbf{r} ,

$$\langle \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}) \rangle_0 = \langle \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}) \rangle_0 = \frac{\rho}{2} \quad (11)$$

où ρ est donc la densité totale de particules dans l'état de BCS d'énergie minimale. On pourra introduire la transformation unitaire \hat{U} changeant, pour chaque particule, l'état $|\uparrow\rangle$ en $|\downarrow\rangle$ et l'état $|\downarrow\rangle$ en $-|\uparrow\rangle$.

d) De même, montrer que le gap de l'état de BCS d'énergie minimale,

$$\Delta = g_0 \langle \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}) \rangle_0, \quad (12)$$

est réel, indépendant de la position \mathbf{r} et peut être pris positif. On pourra introduire la transformation unitaire \hat{U}' changeant, pour chaque particule, l'état $|\uparrow\rangle$ en $|\downarrow\rangle$ et l'état $|\downarrow\rangle$ en $|\uparrow\rangle$.

e) On effectue une variation infinitésimale $\delta\Phi$ du champ de paire Φ autour du minimiseur Φ_0 . Donner la variation correspondante $\delta|\Phi\rangle$ de l'état de BCS au premier ordre en $\delta\Phi$, sous la forme $W|\Phi_0\rangle$, W étant un opérateur, quadratique en les opérateurs champ, que l'on précisera.

f) Calculer la variation de $E[\Phi]$ autour de Φ_0 au premier ordre en $\delta\Phi$. En déduire que

$$\langle W^\dagger (H - E[\Phi_0]) \rangle_0 = 0 \quad (13)$$

On pourra considérer successivement les variations $\delta\Phi$ et $i\delta\Phi$ du champ de paire.

1.2 Le Hamiltonien de BCS

Un acteur central de la théorie de BCS est le Hamiltonien quadratique

$$\mathcal{H} = E_{\text{aj}} + \sum_{\mathbf{r}, \sigma} b^2 \hat{\psi}_\sigma^\dagger [h_0 - \tilde{\mu}] \hat{\psi}_\sigma + \sum_{\mathbf{r}} b^2 \left[\hat{\psi}_\uparrow^\dagger \hat{\psi}_\downarrow^\dagger \Delta + \text{h.c.} \right], \quad (14)$$

où la valeur de E_{aj} sera spécifiée à la question 1.2a ci-dessous, et où l'on a posé

$$\tilde{\mu} = \mu - \frac{1}{2} g_0 \rho \quad (15)$$

On va montrer ici que, dans le cadre de la théorie variationnelle de BCS, le Hamiltonien \mathcal{H} tient lieu de substitut au Hamiltonien complet H pour le calcul de l'énergie et du spectre des excitations élémentaires. On aura besoin de la fonctionnelle énergie correspondant à la moyenne de \mathcal{H} dans un état de BCS :

$$\mathcal{E}[\Phi] = \frac{\langle \Phi | \mathcal{H} | \Phi \rangle}{\langle \Phi | \Phi \rangle} \quad (16)$$

On aura bien enregistré le fait que, dans cette équation, ρ et Δ apparaissant dans \mathcal{H} sont des quantités relatives au minimiseur Φ_0 et ne dépendent donc pas de Φ .

- a) Donner, en termes de g_0 , L , ρ et Δ , la valeur de E_{aj} telle que

$$\langle H \rangle_0 = \langle \mathcal{H} \rangle_0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad E[\Phi_0] = \mathcal{E}[\Phi_0], \quad (17)$$

valeur qui est choisie dans la suite. On rappelle que le théorème de Wick est applicable au calcul des valeurs moyennes dans l'état de BCS.

- b) On admet que l'on peut vérifier, par application du théorème de Wick, que

$$\langle W^\dagger H \rangle_0 = \langle W^\dagger \mathcal{H} \rangle_0 \quad (18)$$

quelle que soit la variation $\delta\Phi$ du champ de paire, l'opérateur W étant celui de la question 1.1e. En déduire que Φ_0 est un point de stationnarité, non seulement de la fonctionnelle $E[\Phi]$, mais aussi de la fonctionnelle $\mathcal{E}[\Phi]$. On notera que cette propriété remarquable est robuste, c'est-à-dire qu'elle subsiste, *mutatis mutandis*, même si les propriétés (i), (ii) et (iii) de Φ_0 vues à la question 1.1b ne sont pas satisfaites, comme par exemple en présence d'un potentiel extérieur.

- c) On admet que tous les états propres de \mathcal{H} sont des états de BCS. En déduire que l'état de BCS recherché $|\Phi_0\rangle$, meilleure approximation variationnelle du fondamental de H , doit être l'état fondamental de \mathcal{H} .
- d) On considère maintenant, au voisinage de la limite thermodynamique, un état propre faiblement excité de H , dont l'approximation variationnelle de BCS correspond au champ de paire Φ_e . On rappelle que Φ_e est toujours un point de stationnarité de $E[\Phi]$, même si ce n'en est plus le minimiseur. Par une généralisation du raisonnement précédent, montrer que $|\Phi_e\rangle$ est presque un état propre de \mathcal{H} . On utilisera le fait que les valeurs moyennes de $\hat{\psi}_\uparrow \hat{\psi}_\downarrow$ et des $\hat{\psi}_\sigma^\dagger \hat{\psi}_\sigma$ dans l'état de BCS $|\Phi_e\rangle$ diffèrent de façon négligeable de leurs moyennes dans l'état $|\Phi_0\rangle$. En déduire que les états propres faiblement excités de \mathcal{H} constituent l'approximation variationnelle à la BCS des états propres faiblement excités du Hamiltonien complet H .

1.3 Équations implicites

La procédure permettant de mettre le Hamiltonien quadratique \mathcal{H} sous forme canonique, et donc de le diagonaliser, a été exposée dans la section 3.2 du cours et a été mise en œuvre explicitement dans le cas de la théorie de BCS lors des Travaux Dirigés numéro 6.

Il suffit donc ici d'en rappeler quelques résultats. On dispose de la décomposition modale des opérateurs champ :

$$\hat{\psi}_{\uparrow}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}\uparrow} \frac{U_{\mathbf{k}}}{L} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - b_{\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \frac{V_{\mathbf{k}}}{L} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (19)$$

$$\hat{\psi}_{\downarrow}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}\downarrow} \frac{U_{\mathbf{k}}}{L} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + b_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} \frac{V_{\mathbf{k}}}{L} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (20)$$

où les opérateurs $b_{\mathbf{k}\sigma}$, obéissant aux relations d'anticommutation habituelles, annihilent une quasi-particule (ou une excitation élémentaire) de vecteur d'onde \mathbf{k} et d'énergie

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = [(E_{\mathbf{k}} - \tilde{\mu})^2 + \Delta^2]^{1/2}, \quad (21)$$

avec $E_{\mathbf{k}}$ défini dans l'équation (5) et $\tilde{\mu}$ dans l'équation (15). On donne aussi la relation suivante satisfaite par les amplitudes $U_{\mathbf{k}}$ et $V_{\mathbf{k}}$ des modes propres, prises réelles :

$$(U_{\mathbf{k}} + iV_{\mathbf{k}})^2 = \frac{E_{\mathbf{k}} - \tilde{\mu} + i\Delta}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \quad (22)$$

- a) Donner la valeur de $U_{\mathbf{k}}V_{\mathbf{k}}$ en fonction de Δ et $\epsilon_{\mathbf{k}}$.
- b) Calculer la valeur moyenne de $\hat{\psi}_{\uparrow}(\mathbf{r})\hat{\psi}_{\downarrow}(\mathbf{r})$ dans l'état fondamental de \mathcal{H} . En déduire une première équation implicite, dite équation du gap, que l'on simplifiera sous l'hypothèse $\Delta \neq 0$. Vérifier que, dans la limite thermodynamique, elle conduit à

$$\frac{-1}{g_0} = \int_{\text{PZB}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \quad (23)$$

- c) Rappeler la condition de normalisation satisfaite par $U_{\mathbf{k}}$ et $V_{\mathbf{k}}$. En déduire la valeur de $V_{\mathbf{k}}^2$ en fonction de $E_{\mathbf{k}} - \tilde{\mu}$ et $\epsilon_{\mathbf{k}}$.
- d) Calculer la valeur moyenne de $\hat{\psi}_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r})\hat{\psi}_{\uparrow}(\mathbf{r})$ dans l'état fondamental de \mathcal{H} . En déduire une seconde équation implicite, dite équation de la densité. Vérifier qu'elle prend la forme suivante dans la limite thermodynamique :

$$\rho = \int_{\text{PZB}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left(1 - \frac{E_{\mathbf{k}} - \tilde{\mu}}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \right) \quad (24)$$

2 Résultats dans la limite de portée nulle

Dans cette partie, il est montré que, de façon remarquable, on peut résoudre analytiquement les équations implicites du gap (23) et de la densité (24), dans la limite où le pas du réseau b tend vers zéro. On obtient alors explicitement Δ et ρ en fonction du potentiel chimique μ .

Comme on l'a signalé dans l'introduction générale, la limite $b \rightarrow 0$ doit être prise à valeur fixée de la longueur de diffusion a en dimension deux. En pratique, on va utiliser le fait, admis, que, dans cette limite, deux particules seules et de spin opposé dans le modèle

sur réseau admettent dans l'espace libre ($L \rightarrow \infty$) un et un seul état lié, un dimère, d'énergie au repos dans l'ensemble *canonique*

$$e_0 = -\frac{4\hbar^2 e^{-2\gamma}}{ma^2} \quad (25)$$

où $\gamma = 0,577\,215\dots$ est la constante d'Euler-Mascheroni. Cette propriété est vraie pour toute valeur (non infinie et non nulle) de la longueur de diffusion a . L'amplitude des interactions sera donc commodément représentée dans les résultats finals par $|e_0|$ plutôt que par a .

2.1 Solutions explicites

- a) En se souvenant de l'équation (6), vérifier que, dans la limite $b \rightarrow 0$, $\tilde{\mu}$ défini dans l'équation (15) peut être identifié à μ , ce qui sera fait dans toute la suite.
- b) Montrer que le membre de droite de l'équation de la densité (24) admet une limite finie lorsque $b \rightarrow 0$.
- c) Calculer explicitement l'intégrale sur \mathbb{R}^2 apparaissant à la question précédente. On passera en coordonnées polaires; après avoir effectué l'intégration angulaire, on fera le changement de variable $x = E_k$ dans l'intégrale radiale. On doit obtenir ρ comme une fonction simple de m/\hbar^2 , μ et Δ .
- d) Le membre de droite de l'équation du gap (23) converge-t-il lorsque $b \rightarrow 0$? Même question pour le membre de gauche de cette équation.
- e) On donne la généralisation à deux dimensions d'un résultat de la section 3.3.9 du cours : pour deux particules seules de spin opposé et d'impulsion totale nulle, la matrice $T(z)$ associée au Hamiltonien H_{can} (dans l'ensemble canonique) du modèle sur réseau admet les éléments de matrice

$$\langle \mathbf{k} | T(z) | \mathbf{k}' \rangle = \frac{1}{\frac{1}{g_0} - \int_{\text{PZB}} \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{1}{z - 2E_q}} \quad (26)$$

où \mathbf{k} et \mathbf{k}' sont des vecteurs d'onde relatifs des deux particules et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. À partir des propriétés analytiques de la résolvante du Hamiltonien H_{can} pour deux particules d'impulsion totale nulle, obtenir une expression de $1/g_0$ en termes d'une intégrale faisant intervenir E_k et l'énergie $e_0 < 0$ de l'état lié.

- f) À l'aide de la question précédente, éliminer g_0 dans le membre de gauche de l'équation (23). Par regroupement, obtenir une unique intégrale sur \mathbf{k} , dont on montrera qu'elle converge dans la limite $b \rightarrow 0$ à e_0 fixé.
- g) Calculer l'intégrale correspondante sur \mathbb{R}^2 , en utilisant les recommandations de la question 2.1c, complétées par le changement de variable $x - \mu = \Delta \operatorname{sh} \theta$. On rappelle aussi la forme explicite de la fonction inverse

$$\operatorname{argsh} X = \ln(X + \sqrt{1 + X^2}) \quad (27)$$

utile pour déterminer la limite d'une primitive en $x = +\infty$. On doit finalement obtenir une expression simple pour $\operatorname{argsh}(\mu/\Delta)$ en fonction de $\Delta/|e_0|$.

- h) En appliquant la fonction sinus hyperbolique à l'équation précédemment obtenue, obtenir une expression explicite simple de μ en fonction de Δ et $|e_0|$.
- i) En déduire que $\mu^2 + \Delta^2$ est un carré parfait.
- j) Compte tenu des réponses aux questions 2.1c, 2.1h et 2.1i, aboutir au résultat final obtenu en 1989 par Mohit Randeria et ses collaborateurs :

$$\Delta = [|e_0|(|e_0| + 2\mu)]^{1/2} \quad (28)$$

$$\rho = \frac{m}{2\pi\hbar^2}(|e_0| + 2\mu) \quad (29)$$

2.2 Discussion physique

- a) À valeur fixée de l'amplitude des interactions, quel est le domaine de variation du potentiel chimique μ compatible avec l'hypothèse de calcul $\Delta \neq 0$?
- b) Montrer que le spectre des excitations élémentaires ϵ_k comporte une bande interdite dont on donnera la largeur en fonction de μ et Δ . On distinguera les cas $\mu < 0$ et $\mu > 0$.
- c) On fait maintenant varier l'amplitude des interactions. Vers quel état tend le gaz lorsque $a \rightarrow +\infty$? On pourra noter que la densité totale du gaz parfait de spin 1/2, de température nulle et d'énergie de Fermi E_F , vaut simplement $mE_F/(\pi\hbar^2)$ à deux dimensions.
- d) On considère finalement la limite $a \rightarrow 0^+$ à densité ρ fixée. Comment se comporte e_0 dans cette limite ? Et ρa^2 ? Et μ ? Et la largeur de la bande interdite dans le spectre d'excitation ? Quel est alors l'état du gaz ? Argumenter soigneusement.

3 Comparaison aux expériences

Depuis une dizaine d'années, on sait réaliser en laboratoire des gaz d'atomes fermioniques fortement dégénérés, c'est-à-dire avec une température T telle que $k_B T \ll E_F$. On admettra que ceci correspond en pratique à la température nulle. De plus, en confinant fortement les atomes selon la direction Oz par un potentiel harmonique, on fige leur mouvement suivant Oz dans son état vibrationnel fondamental, ce qui permet de réaliser un gaz effectivement bidimensionnel dans le plan xOy . Comme deux atomes dans les états de spin opposé \uparrow et \downarrow interagissent dans l'espace réel à trois dimensions, avec la longueur de diffusion a_{3D} dans l'onde s , il se produit une interaction effective dans le gaz bidimensionnel, avec une longueur de diffusion a en dimension deux connue, conduisant à

$$e_0 = -A\hbar\omega_z e^{(2\pi)^{1/2}\ell_z/a_{3D}} \quad (30)$$

où $A \simeq 0,288$, ω_z est la pulsation d'oscillation d'un atome suivant Oz et $\ell_z = [\hbar/(m\omega_z)]^{1/2}$ est la taille de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique suivant Oz .

De plus, on peut accéder au spectre d'excitation du gaz bidimensionnel en cherchant à induire une transition atomique de l'état de spin $|\uparrow\rangle$ vers un autre état interne initialement

vide $|d\rangle$, plus haut en énergie de $\hbar\omega_0$, par absorption d'un photon de radiofréquence de pulsation ω et d'impulsion négligeable. On détecte alors la présence ou non d'un atome dans l'état interne $|d\rangle$, suivant la valeur du désaccord $\delta = \omega - \omega_0$. Plus précisément, on constate que la transition d'un atome de $|\uparrow\rangle$ vers $|d\rangle$ n'est possible que si le désaccord est supérieur à une valeur seuil δ_S , $\delta > \delta_S$.

Comme l'amplitude des interactions atomiques entre \uparrow et \downarrow est ajustable par résonance de Feshbach magnétique, on peut mesurer le désaccord seuil δ_S pour plusieurs valeurs de e_0 , à densité surfacique fixée ρ du gaz de fermions bidimensionnel. En revanche, l'état final d doit toujours avoir une interaction atomique négligeable avec \uparrow et \downarrow . Voici des valeurs obtenues en 2012 dans l'équipe de Martin Zwierlein au MIT sur un gaz de ${}^6\text{Li}$, corrigées de l'effet de l'anharmonicité du confinement suivant Oz :

ℓ_z/a_{3D}	δ_S/ω_z
-0,409	$0,085 \pm 0,015$
-0,177	$0,147 \pm 0,015$
0,007	$0,253 \pm 0,015$

- Initialement, le gaz bidimensionnel est dans son état fondamental, l'état interne $|d\rangle$ est vide et le champ électromagnétique contient un photon d'énergie $\hbar\omega$. Donner l'énergie E_i de cet état initial, en fonction de $E[\Phi_0]$ et de $\hbar\omega$.
- On suppose qu'un atome a subi une transition vers l'état interne $|d\rangle$, après absorption du photon de radiofréquence, et que ceci a déposé une excitation élémentaire de vecteur d'onde \mathbf{k} dans le gaz bidimensionnel. Dans quel vecteur d'onde se retrouve l'atome ayant subi la transition ? Donner l'énergie E_f de l'état final du système complet, en fonction de $E[\Phi_0]$, $\hbar\omega_0$, ϵ_k , E_k et μ . Comme on est ici dans l'ensemble grand canonique, on se souviendra d'inclure la contribution $-\mu$ à l'énergie dans $|d\rangle$.
- En utilisant la conservation de l'énergie $E_f = E_i$, montrer que

$$\hbar\delta_S = \inf_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2} (\epsilon_k + E_k - \mu) \quad (31)$$

- Montrer que la fonction $x \mapsto x + (x^2 + 1)^{1/2}$ est positive et croissante sur \mathbb{R} . En déduire la valeur de $\hbar\delta_S$ en fonction de μ et Δ puis, en utilisant les réponses aux questions 2.1h et 2.1i, en fonction de e_0 seulement.
- Comparer aux résultats expérimentaux donnés dans la table. Pour quel(s) point(s) y a-t-il bon accord ?
- Pour déterminer la première correction à e_0 due à la portée non nulle (d'ordre ℓ_z) de l'interaction effective bidimensionnelle dans l'expérience, on introduit le développement à faible nombre d'onde relatif k de l'amplitude de diffusion f_k à deux dimensions :

$$\frac{-1}{f_k} = 1 + \frac{2i}{\pi} \left[\ln(e^\gamma ka/2) - \frac{\ln 2}{2} k^2 \ell_z^2 + \dots \right] \quad (32)$$

En déduire la valeur corrigée $|e_0^{\text{corr}}| = |e_0| [1 - (\ln 2) \frac{|e_0|}{\hbar\omega_z} + \dots]$, et montrer que cette correction, bien qu'heuristique, améliore substantiellement l'accord avec l'expérience.