Amortissement des modes de Bogoliubov

M2 de physique quantique 2006-2007

Examen de mécanique quantique I

Y. Castin et A. Sinatra

On considère un gaz de Bose spatialement homogène et à l'équilibre thermique, dans le régime d'un condensat presque pur. Les particules constituant le gaz sont sans spin et ont une interaction de portée négligeable et de longueur de diffusion strictement positive. Le Hamiltonien de Bogoliubov prédit l'existence de modes propres, les modes de Bogoliubov, mais néglige l'interaction entre ces modes. On souhaite ici prendre en compte l'interaction entre les modes, et montrer qu'elle conduit à une durée de vie finie pour les excitations de Bogoliubov. Pour cela, on isole par la pensée un mode de Bogoliubov, celui de vecteur d'onde $\mathbf{q}$, appelé "mode $\mathbf{q}$" dans la suite, et l'on traite l'ensemble des autres modes comme un réservoir. Avec le formalisme vu en cours, on dérive ensuite une équation pilote pour l'opérateur densité du mode considéré. On en tire enfin quelques conséquences physiques.

Il est conseillé de traiter les questions et les parties dans leur ordre d'apparition. Cependant, on notera que les trois parties sont largement indépendantes.

1 Construction du modèle : couplage du mode q aux autres modes

1.1 La première correction au Hamiltonien de Bogoliubov

On rappelle l'écriture en seconde quantification du Hamiltonien modèle pour le gaz de Bose interagissant par un potentiel en δ de Dirac :

$$H = \int_{L^3} d^3r \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\psi^\dagger(\mathbf{r})\Delta\psi(\mathbf{r}) + \frac{g}{2}\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \right]. \tag{1}$$

L'opérateur champ est noté $\psi(\mathbf{r})$, m est la masse d'une particule et $g > 0$ est la constante de couplage. L'intégrale spatiale est prise dans une boîte cubique de côté L, et l'on impose des conditions aux limites périodiques.

a) Donner la fonction d'onde du condensat $\phi(\mathbf{r})$, correctement normalisée.

b) Comme en cours, on effectue la décomposition de l'opérateur champ

$$\psi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r})a_\phi + \delta\psi(\mathbf{r}) \tag{2}$$

où l'opérateur a_ϕ est l'opérateur d'annihilation d'une particule dans le mode du condensat. Expliquer pourquoi il faut chercher les termes cubiques en $\delta\psi$ dans H, si l'on veut calculer la première correction au Hamiltonien de Bogoliubov.

c) Montrer que le terme d'énergie cinétique H_{cin} dans le Hamiltonien H fait intervenir $\delta\psi$ mais pas a_ϕ. En déduire que H_{cin} ne peut pas faire apparaître de terme cubique en $\delta\psi$.

d) On injecte la décomposition Eq.(2) dans la partie d'interaction H_{int} du Hamiltonien. Ecrire tous les termes jusqu'à l'ordre trois inclus en $\delta\psi$. Montrer que les termes d'ordre un en $\delta\psi$ sont nuls après intégrale sur $\mathbf{r}$.

e) On utilise maintenant la représentation module-phase

$$a_\phi = e^{i\theta}\hat{n}_\phi^{1/2} \tag{3}$$

avec $\hat{n}_\phi$ est l'opérateur nombre de particules dans le mode du condensat. On élimine $\hat{n}_\phi$ grâce à la relation

$$\hat{n}_\phi = \hat{N} - \int_{L^3} d^3r\, \delta\psi^\dagger\delta\psi \tag{4}$$

et on élimine l'opérateur phase du mode du condensat, supposé hermitien, en introduisant le champ

$$\Lambda(\mathbf{r}) = e^{-i\theta}\delta\psi(\mathbf{r}). \tag{5}$$

Montrer que seuls les termes de la question précédente d'ordre trois en $\delta\psi$ conduisent finalement à des termes cubiques en Λ, après élimination du mode du condensat. Ecrire explicitement ces termes cubiques, qui constituent H_{cube}, la première correction au Hamiltonien de Bogoliubov H_{Bog}.

1.2 Hamiltonien du système plus réservoir

Dans la correction cubique H_{cube} au Hamiltonien de Bogoliubov, on isole maintenant le mode de Bogoliubov de vecteur d'onde $\mathbf{q}$, constituant le petit système S, de l'ensemble des autres modes de Bogoliubov constituant le réservoir R. On utilise pour cela la décomposition modale de Bogoliubov du champ, récrite ainsi :

$$\Lambda(\mathbf{r}) = \Lambda_S(\mathbf{r}) + \Lambda_R(\mathbf{r}) \tag{6}$$

$$\Lambda_S(\mathbf{r}) = b_{\mathbf{q}}\frac{U_q}{L^{3/2}}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} + b_{\mathbf{q}}^\dagger\frac{V_q}{L^{3/2}}e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tag{7}$$

$$\Lambda_R(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}}{}' b_{\mathbf{k}}\frac{U_k}{L^{3/2}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger\frac{V_k}{L^{3/2}}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \tag{8}$$

où $b_{\mathbf{k}}$ annihile une excitation de Bogoliubov dans le mode de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et obéit aux relations de commutation habituelles, les amplitudes réelles U_k et V_k dépendent du module k du vecteur d'onde mais pas de sa direction, et sont normalisées à $U_k^2 - V_k^2 = 1$, et $\sum'_{\mathbf{k}}$ représente la somme sur tous les vecteurs d'onde de la forme $2\pi/L$ fois un vecteur à coordonnées entières, avec $\mathbf{k}$ différent de $\mathbf{0}$ et de $\mathbf{q}$. On notera que Λ_S commute avec Λ_R et $\Lambda_R^\dagger$.

a) A partir de la forme canonique du Hamiltonien de Bogoliubov, donner le Hamiltonien H_S du système S non perturbé, en terme de b_q, $b_q^\dagger$ et de l'énergie de Bogoliubov ϵ_q du mode $\mathbf{q}$, fonction du module q, et que l'on notera

$$\epsilon_q = \hbar\omega_q. \tag{9}$$

b) De même, donner le Hamiltonien H_R du réservoir, en se limitant à l'approximation de Bogoliubov, c'est-à-dire en négligeant les contributions de $H_{\rm cube}$. On notera les énergies de Bogoliubov sous la forme $\hbar\omega_k$. On ne se préoccupera pas d'écrire une éventuelle constante additive dans H_R.

c) Injecter la décomposition Eq.(6) dans $H_{\rm cube}$, en gardant *seulement* les termes d'ordre un en Λ_S, puis remplacer Λ_S par sa forme développée Eq.(7). On gardera l'autre champ sous sa forme compacte Λ_R. Montrer qu'on aboutit ainsi à un couplage entre système et réservoir de la forme

$$V = g\sqrt{\rho}\left(b_q R^\dagger + b_q^\dagger R\right) \tag{10}$$

où ρ est la densité du gaz et R est un opérateur du réservoir que l'on exprimera en fonction de Λ_R, U_q, V_q, $\mathbf{q}$ et L.

d) On cherche maintenant à justifier le fait que l'on se soit limité, dans la question précédente, aux termes de $H_{\rm cube}$ linéaires en Λ_S. On appelle "conservation de l'impulsion" le fait que l'intégrale sur L^3 du produit d'un nombre quelconque d'ondes planes est non nulle seulement si la somme des vecteurs d'onde est nulle. Sans chercher à faire des calculs complètement explicites, montrer par "conservation de l'impulsion" que la contribution cubique en Λ_S dans $H_{\rm cube}$ est rigoureusement nulle. Montrer ensuite, par "conservation de l'impulsion" et en utilisant les formes développées de Λ_S et Λ_R, que la contribution quadratique en Λ_S dans $H_{\rm cube}$ est une somme d'un nombre *fini* de termes en b et $b^\dagger$, négligeable à la limite thermodynamique.

On revient au couplage Eq.(10) entre système et réservoir. Dans l'expression de R, on remplace Λ_R par sa forme développée Eq.(8). Le calcul explicite, sans difficulté, est cependant long et peu intéressant; il n'est donc pas demandé. On donne directement la forme du résultat,

$$R = \frac{1}{L^{3/2}} {\sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}}' A_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} b^\dagger_{\mathbf{k}_1} b^\dagger_{\mathbf{k}_2} + B_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} b_{\mathbf{k}_1} b_{\mathbf{k}_2} + C_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} b^\dagger_{\mathbf{k}_1} b_{\mathbf{k}_2} \tag{11}$$

avec la forme suivante pour les matrices A, B, C :

$$\begin{aligned}
A_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} &= \delta_{-\mathbf{q},\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\mathcal{A}_{k_1,k_2} && (12)\\
B_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} &= \delta_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\mathcal{B}_{k_1,k_2} && (13)\\
C_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} &= \delta_{\mathbf{q},\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}\mathcal{C}_{k_1,k_2}, && (14)
\end{aligned}$$

où δ est ici le delta de Kronecker, et les fonctions en style calligraphique, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, dont l'expression explicite (réelle) en terme des U et V importe peu, dépendent des modules des vecteurs d'onde, pas de leur direction.

e) Justifier de façon précise l'expression des deltas de Kronecker apparaissant dans les matrices A, B et C, en utilisant l'argument de conservation de l'impulsion. On pourra utiliser le fait que, dans les champs considérés, $b_{\mathbf{k}}$ est toujours accompagné du facteur $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ et $b^\dagger_{\mathbf{k}}$ est toujours accompagné du facteur $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$.

f) Montrer que l'on peut faire commuter b et $b^\dagger$ dans les termes de R faisant intervenir la matrice C. En déduire une justification de l'absence de termes en $b\,b^\dagger$ dans R.

g) Pourquoi peut-on supposer que les matrices A et B sont symétriques ? On supposera que c'est le cas dans la suite. A-t-on la même liberté pour la matrice C ?

2 Obtention de l'équation pilote sur l'opérateur densité du mode q

Le Hamiltonien H_S du système (le mode $\mathbf{q}$), H_R du réservoir (les autres modes de Bogoliubov) et le couplage V entre le système et le réservoir, ont été obtenus dans la partie précédente. Dans cette partie, on obtient une équation pilote sur l'opérateur densité ρ_S du système, en utilisant l'approximation de Born-Markov vue en cours. On suppose que l'opérateur densité initial de l'ensemble système plus réservoir est factorisé,

$$\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_R(0). \tag{15}$$

L'opérateur densité initial du système est quelconque, mais l'opérateur densité initial du réservoir correspond à l'équilibre thermique à la température T :

$$\rho_R(0) = \frac{1}{Z}\, e^{-\beta H_R} \tag{16}$$

avec Z facteur de normalisation et $\beta = 1/(k_B T)$.

2.1 Forme de l'équation pilote

a) On rappelle une hypothèse simplificatrice utilisée en cours :

$$\mathrm{Tr}_R[V \rho_R(0)] = 0 \tag{17}$$

où la trace est prise sur les états du réservoir. Montrer que cette hypothèse est ici satisfaite.

b) On passe en point de vue interaction, désigné par un tilde. Donner explicitement $\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t)$ et $\tilde{b}^\dagger_{\mathbf{k}}(t)$ en fonction des opérateurs $b_{\mathbf{k}}$, $b^\dagger_{\mathbf{k}}$, de la pulsation ω_k et du temps.

c) On effectue directement l'approximation de Born-Markov, ce qui conduit à l'équation pilote (on ne demande pas de redériver ce résultat) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) &= -\frac{1}{\hbar^2}\int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \mathrm{Tr}_R\left[\tilde{V}(t)\tilde{V}(t-\tau)\tilde{\rho}_S(t)\otimes\rho_R(0)\right] + \text{h.c.}\right\} \\ &\quad +\frac{1}{\hbar^2}\int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \mathrm{Tr}_R\left[\tilde{V}(t)\tilde{\rho}_S(t)\otimes\rho_R(0)\tilde{V}(t-\tau)\right] + \text{h.c.}\right\}. \end{aligned} \tag{18}$$

En remplaçant dans cette expression V par sa forme Eq.(10), et en exprimant $\tilde{b}_{\mathbf{q}}(t-\tau)$ en fonction de $\tilde{b}_{\mathbf{q}}(t)$, ω_q et τ, montrer que l'équation pilote sur $\tilde{\rho}_S(t)$ fait apparaître des intégrales sur τ du produit de fonctions oscillant à la pulsation $\pm\omega_q$ et l'une des quatre fonctions de corrélation :

$$g_{++}(\tau) = \mathrm{Tr}_R\left[\tilde{R}^\dagger(t)\tilde{R}^\dagger(t-\tau)\rho_R(0)\right] \tag{19}$$

$$g_{+-}(\tau) = \mathrm{Tr}_R\left[\tilde{R}^\dagger(t)\tilde{R}(t-\tau)\rho_R(0)\right] \tag{20}$$

$$g_{-+}(\tau) = \mathrm{Tr}_R\left[\tilde{R}(t)\tilde{R}^\dagger(t-\tau)\rho_R(0)\right] \tag{21}$$

$$g_{--}(\tau) = \mathrm{Tr}_R\left[\tilde{R}(t)\tilde{R}(t-\tau)\rho_R(0)\right]. \tag{22}$$

d) Montrer que l'équation pilote sur $\tilde{\rho}_S(t)$ comporte des termes oscillant avec t à la pulsation $\pm 2\omega_q$. Sous l'hypothèse que les taux de variation de $\tilde{\rho}_S(t)$ sont beaucoup plus faibles que $2\omega_q$, pourquoi peut-on négliger ces termes dans l'équation pilote ? Rappeler comment s'appelle l'approximation correspondante, qui est effectuée dans la suite.

e) Montrer que cette approximation est justifiée dans la limite où la constante de couplage g tend vers zéro, à valeur fixée de ρg, de $k_B T$ et de L^3. Pour cela, on montrera que les fonctions de corrélation $g_{\pm\pm}(\tau)$ gardent une valeur constante dans cette limite, alors que $\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t)$ dans l'équation pilote tend vers zéro.

f) Montrer que cette approximation conduit à la forme suivante de l'équation pilote, une fois que l'on a quitté la représentation interaction :

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \frac{1}{i\hbar}[\hbar\tilde{\omega}_q b^\dagger b, \rho_S(t)] - \frac{1}{2}\{\Gamma_+ b b^\dagger + \Gamma_- b^\dagger b, \rho_S(t)\} + \Gamma_+ b^\dagger \rho_S(t) b + \Gamma_- b \rho_S(t) b^\dagger, \tag{23}$$

où $[X, Y] = XY - YX$ est le commutateur et $\{X, Y\} = XY + YX$ est l'anticommutateur. Pour alléger l'écriture, on a laissé tomber l'indice $\mathbf{q}$ en posant $b = b_{\mathbf{q}}$, $b^\dagger = b_{\mathbf{q}}^\dagger$. La pulsation $\tilde{\omega}_q$ est la pulsation du mode renormalisée par le réservoir, c'est-à-dire incluant un déplacement dû au couplage; l'expression de $\tilde{\omega}_q$ est inutile pour la suite et n'est pas demandée. Par contre, on exprimera les taux Γ_+ et Γ_- en termes d'une intégrale sur τ de $-\infty$ à $+\infty$ faisant intervenir respectivement la fonction $g_{+-}(\tau)$ et la fonction $g_{-+}(\tau)$.

g) Montrer que l'équation pilote Eq.(23) est de la forme de Lindblad, et donner la forme évidente des deux opérateurs C_+ et C_- associés. Dans la méthode des fonctions d'onde Monte-Carlo, quel est l'effet sur le vecteur d'état du système d'un saut quantique associé à l'opérateur C_+ ? Même question pour l'opérateur C_-. En déduire la justification physique des notations Γ_+ et Γ_-.

h) Lequel des deux types de saut est supprimé dans la limite où la température T du réservoir tend vers zéro ? Faire le lien avec le processus d'émission spontanée en physique atomique.

2.2 Calcul des taux de transition

On passe maintenant à un calcul plus explicite des taux $\Gamma_\pm$. On utilisera la réponse à la question f de la sous-partie 2.1, reliant ces taux aux fonctions de corrélation g_{+-} et g_{-+}, après avoir au préalable calculé ces fonctions de corrélation.

a) En utilisant la forme Eq.(11) de l'opérateur R, montrer très simplement qu'il n'y a pas de contribution croisée entre les matrices A, B, C aux fonctions de corrélation g_{+-} et g_{-+}. Il peut donc y avoir seulement des contributions en $A - A$, $B - B$ et $C - C$.

b) Montrer que la contribution $A - A$ à $g_{+-}(\tau)$ ne contient que des termes de fréquence positive, c'est-à-dire en $e^{-i\omega t}$ avec $\omega > 0$. En déduire que la contribution $A - A$ à Γ_+ est nulle. On rappelle l'identité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, e^{-i\omega\tau} = 2\pi\delta(\omega) \tag{24}$$

où δ est la distribution de Dirac et ω une variable réelle. De même, montrer que la contribution $A-A$ à Γ_- est nulle. S'attend-on *a priori* au même résultat pour la contribution $A-A$ à $\tilde{\omega}_q$?

c) Ecrire l'expression de la contribution $B-B$ à la fonction de corrélation $g_{+-}(\tau)$, en termes d'une quadruple somme sur des vecteurs d'onde $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$, $\mathbf{k}_4$. Grâce au théorème de Wick, exprimer la moyenne $\langle\ldots\rangle_R$ sur l'état thermique du réservoir de :

$$\langle b^\dagger_{\mathbf{k}_2} b^\dagger_{\mathbf{k}_1} b_{\mathbf{k}_3} b_{\mathbf{k}_4}\rangle_R \tag{25}$$

en fonction des nombres d'occupation

$$n_k = \langle b^\dagger_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}\rangle_R = \frac{1}{e^{\beta\epsilon_k}-1}. \tag{26}$$

En déduire que les sommes sur $\mathbf{k}_3$ et $\mathbf{k}_4$ s'effectuent aisément.

d) Eliminer la somme sur $\mathbf{k}_2$ en utilisant les deltas de Kronecker de conservation de l'impulsion dans la matrice B. On ne s'inquiétera pas d'éventuelles contraintes imposées à $\mathbf{k}_1$ par le fait que $\mathbf{k}_2 \neq \mathbf{0}, \mathbf{q}$, car on passe maintenant à la limite thermodynamique, en remplaçant la somme sur $\mathbf{k}_1$ par une intégrale. On rappelle que la matrice B est symétrique. Obtenir finalement la contribution Γ_+^{BB} des termes $B-B$ au taux Γ_+, sous forme d'une intégrale sur $\mathbf{k}$, l'intégrand contenant $\mathcal{B}^2_{k,|\mathbf{k}-\mathbf{q}|}$, un produit de nombres d'occupation et un δ de Dirac de conservation de l'énergie.

e) Reproduire la démarche précédente pour la contribution $B-B$ à la fonction de corrélation $g_{-+}(\tau)$. En déduire la contribution Γ_-^{BB} des termes $B-B$ de g_{-+} au taux Γ_-. On doit trouver la même expression que pour Γ_+^{BB}, à un changement près très simple sur les nombres d'occupation des modes.

f) Vérifier que la loi de Bose a la propriété suivante :

$$1+n_k = e^{\beta\epsilon_k} n_k. \tag{27}$$

En déduire la relation exacte :

$$\Gamma_-^{BB} = e^{\beta\hbar\omega_q}\Gamma_+^{BB}. \tag{28}$$

g) On admet que cette propriété reste vraie pour les contributions $C-C$ aux taux $\Gamma_\pm$. Montrer qu'on peut alors introduire un taux Γ tel que

$$\Gamma_+ = \Gamma\, n_q \tag{29}$$
$$\Gamma_- = \Gamma\,(1+n_q). \tag{30}$$

Cette notation sera très utile pour la partie 3.

3 Exploitation physique de l'équation pilote

Dans cette dernière partie, on tire quelques conséquences physiques de l'équation pilote Eq.(23). On n'aura pas besoin de l'expression des taux Γ_+ et Γ_-, seules les relations Eqs.(29,30) sont utiles.

3.1 Calcul de l'opérateur densité stationnaire du système

On considère dans cette sous-partie une solution stationnaire de l'équation pilote, c'est-à-dire une solution ρ_S indépendante du temps. On introduit la base de Fock $|n\rangle$ du mode $\mathbf{q}$,

$$|n\rangle = \frac{(b^\dagger)^n}{(n!)^{1/2}}|0\rangle \tag{31}$$

où $|0\rangle$ est le vide du mode $\mathbf{q}$ et n un entier naturel.

a) Rappeler l'action de b et $b^\dagger$ sur l'état $|n\rangle$ à n excitations.

b) On considère les cohérences de l'opérateur densité du système dans la base de Fock, c'est-à-dire les éléments de matrice $\langle n|\rho_S|n'\rangle$ avec $n \neq n'$. Ces cohérences sont-elles couplées aux populations

$$\Pi_n = \langle n|\rho_S|n\rangle \tag{32}$$

par l'équation pilote ? En déduire qu'il est raisonnable physiquement de supposer que toutes les cohérences sont nulles dans l'état stationnaire.

c) Ecrire l'équation d'évolution des populations Π_n donnée par l'équation pilote.

d) On cherche une solution stationnaire à l'équation précédente avec l'ansatz

$$\Pi_n = \Pi_0 \lambda^n. \tag{33}$$

A l'aide des relations Eqs.(29,30), montrer que $\lambda = e^{-\beta\hbar\omega_q}$. Comment appelle-t-on physiquement l'état stationnaire trouvé ? Le résultat était-il prévisible physiquement ?

3.2 Evolution de certaines quantités à partir d'un état hors d'équilibre

a) Soit un opérateur O du système, quelconque mais indépendant du temps. On définit la moyenne de O dans l'état du système à l'instant t :

$$\langle O\rangle(t) = \mathrm{Tr}\left[O\rho_S(t)\right]. \tag{34}$$

En utilisant l'équation pilote et l'invariance d'une trace par permutation circulaire, montrer que

$$\frac{d}{dt}\langle O\rangle = i\tilde{\omega}_q\langle[b^\dagger b, O]\rangle + \frac{\Gamma_-}{2}\langle[b^\dagger, O]b + b^\dagger[O, b]\rangle + \frac{\Gamma_+}{2}\langle[b, O]b^\dagger + b[O, b^\dagger]\rangle. \tag{35}$$

b) On admet qu'en éclairant un gaz atomique par deux faisceaux laser loin de résonance, on est capable de créer le potentiel extérieur suivant :

$$U = \int_{L^3} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \left[U_0(t)\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} + \text{c.c.}\right] \psi(\mathbf{r}) \tag{36}$$

où l'amplitude complexe $U_0(t)$ dépend du temps. En utilisant la décomposition Eq.(2), en éliminant le mode du condensat grâce à la représentation module-phase et en introduisant le champ Λ, montrer que U est linéaire en Λ à l'ordre le plus bas en $\delta\psi$. En déduire que U contient, à cet ordre, des termes linéaires en b et $b^\dagger$; on utilisera bien sûr la décomposition modale Eq.(7) et on rappelle que $b = b_{\mathbf{q}}$.

c) Montrer que l'action du potentiel U permet de produire un état du système S tel que $\langle b \rangle \neq 0$. On négligera bien entendu le couplage aux autres modes de Bogoliubov pendant la phase d'excitation par U.

d) Une fois l'état à $\langle b \rangle \neq 0$ préparé, on éteint l'excitation U et on étudie l'évolution de $\langle b \rangle$ avec l'équation pilote. En utilisant Eq.(35) avec $O = b$, obtenir une équation très simple sur cette valeur moyenne et l'intégrer. Avec quel taux $\langle b \rangle$ relaxe-t-elle ? Montrer que, paradoxalement, ce taux peut être beaucoup plus faible que Γ_+ et Γ_- (dans un régime que l'on précisera).

e) On souhaite voir si le même paradoxe existe pour le nombre moyen de quanta $\langle b^\dagger b \rangle$. En utilisant Eq.(35), montrer que ce nombre moyen relaxe vers sa valeur stationnaire avec la même constante de temps que $\langle b \rangle$, à un facteur numérique simple près.

3.3 Fonction de corrélation du nombre de quanta

On définit en point de vue de Heisenberg la fonction de corrélation temporelle de l'opérateur O du système S, l'ensemble du système et du réservoir étant supposé pour simplifier à l'équilibre :

$$\chi(t - t') \equiv \langle O(t) O(t') \rangle. \tag{37}$$

On admet le théorème de régression quantique : à $t \geq 0$,

$$\chi(t) = \mathrm{Tr}\left[O\, \sigma_S(t)\right] \tag{38}$$

où le pseudo-opérateur densité du système $\sigma_S(t)$ n'est en général ni hermitien ni de trace unité, mais évolue selon la même équation pilote que ρ_S, avec la condition initiale

$$\sigma_S(0) = O\, \rho_S^{\mathrm{eq}} \tag{39}$$

où ρ_S^{eq} est ici l'opérateur densité vrai du système à l'équilibre.

a) La trace de $\sigma_S(t)$ dépend-elle du temps ?

b) Bien que σ_S ne soit pas un vrai opérateur densité, montrer que la relation Eq.(35) reste vraie, pourvu que l'on remplace les valeurs moyennes $\langle \ldots \rangle$ par $\mathrm{Tr}[\ldots \sigma_S(t)]$.

c) Désormais, on prend $O = b^\dagger b$. Exprimer $\mathrm{Tr}[\sigma_S(t)]$ puis $\chi(0)$ en fonction de n_q à l'aide (si nécessaire) du théorème de Wick. Ecrire l'équation différentielle satisfaite par $\chi(t)$. Intégrer cette équation en tenant compte de la condition initiale.

d) Quelle est la valeur de $\chi(t)$ aux temps longs ? Pouvait-on la prévoir physiquement ? Avec quel taux $\chi(t)$ atteint-elle cette valeur asymptotique ?